INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND VIERTES HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11,20

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2440

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Beck, M., Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion. Mit 12 Textabbildungen 231

Zoller, K., Über die Koppelung der Dehnungs- und Torsionsschwingungen von umlaufenden Scheiben. Mit 2 Textabbildungen 254

Weidenhammer, F., Rheolineare Drehschwingungen in Kolbenmotoren. Mit 2 Textabbildungen 262

Hirschfeld, K., Kreisförmiger Stollen unter Temperaturbeanspruchung. Mit 8 Textabbildungen 270

Stückler, B., Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen. Mit 5 Textabbildungen 279

Drückler, F., Zur Beulung des flachen kreiszylindrischen Schalenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie. Mit 4 Textabbildungen 288

Szablewski, W., Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. Mit 9 Textabbildungen 295

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND VIERTES HEFT 1955

Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*.

Von M. Beck.

1. Einleitung. *L. Euler* hat im Jahre 1757 als Erster die axiale Druckkraft berechnet [1], unter der ein schlanker Stab ausknickt. Ein seitliches Ausbiegen kann auch bei einem Stab auftreten, der ein Drehmoment zu übertragen hat. Die kritische Belastung eines gedrückten und tordierten Stabes hat für kreisförmigen Querschnitt zuerst *A. G. Greenhill* [2] untersucht, während *H. Grammel* [3] für die Lagerung V von Abb. 4 eine Lösung für beliebige Querschnitte berechnet hat. Diese Arbeiten beruhen auf der Annahme, daß der Momentvektor beim Ausknicken seine ursprüngliche axiale Richtung beibehalte. Das merkwürdige Ergebnis, daß bei den Lagerungen III und IV in Abb. 4 ein beliebig kleines Moment den Stab zu knicken vermag, regte *H. Ziegler* [4] zu einer genaueren Überprüfung des belastenden Momentes an. Dabei zeigte sich zunächst, daß ein axiales Moment nichtkonservativ ist. Nichtkonservative Stabilitätsprobleme müssen aber mit dem kinetischen Stabilitätskriterium (Untersuchung der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage) behandelt werden, während das von *Greenhill* und *Grammel* verwendete einfachere statische (Bestimmung kritischer Belastungen durch Ermittlung der nichttrivialen Gleichgewichtslagen) und das energetische Kriterium (für die kritische Belastung ist die potentielle Energie erstmals nicht mehr positiv definit) nur bei konservativen Systemen verwendet werden dürfen [5]. Die von *A. Trösch* [6] durchgeführten Schwingungsrechnungen ergeben, daß selbst bei Einführung von Dämpfungskräften die erwähnten unbefriedigenden Resultate nur zum Teil korrigiert werden.

Indem *H. Ziegler* [7] auf die den Momentvektor erzeugenden Einzelkräfte zurückging, stellte er fest, daß sich für die praktisch wichtigsten Belastungsarten konservative Momente ergeben (vgl. auch Abschnitt 2 b), während Kräfteverteilungen, die axial bleibende Momente liefern, wohl ziemlich selten vorkommen. Mit den von ihm herausgegriffenen Belastungen definierte er das semi-, das quasi- und das pseudotangentiale Moment und zeigte, daß mit diesen Momenten beim Stab mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten für alle fünf Arten der Lagerung in Abb. 4 plausible Knicklasten gefunden werden [8,9].

Die folgende Arbeit stellt eine Erweiterung der Rechnungen von *H. Ziegler* dar. Unter allgemeinen Voraussetzungen werden im Abschnitt 2 die Ausgangsgleichungen abgeleitet. Eine Lösung ohne Einschränkungen führt indessen auf sehr unübersichtliche Knickgleichungen. Wir lassen daher im Abschnitt 3 einen Stab mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten zu, der zwar sogar eine spannungsfreie Verwindung aufweisen kann, jedoch vor dem Knicken nur auf Torsion beansprucht sein soll. Im Abschnitt 4 wird dann bei einem Stab mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten auch eine Druckkraft mitberücksichtigt. Insbesondere die Knickgleichungen dieses Abschnittes werden eingehend diskutiert und die kritischen Dynamen in Diagrammen wiedergegeben.

---

* Von der ETH in Zürich genehmigte Promotionsarbeit.

[1] *L. Euler*, Histoire de l'Académie, Bd. 13, Berlin 1757.

[2] *A. G. Greenhill*, Proc. Inst. Mech. Eng. 1883, S. 182.

[3] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3, (1923), S. 262; siehe auch *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 607, 2. Aufl. 1953.

[4] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2, (1951) S. 265. *H. Ziegler* stellte ferner fest, daß für verschiedene Arten der Lagerung jede Drehzahl kritisch ist, sobald die Welle ein beliebig kleines axiales Moment zu übertragen hat.

[5] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 49 und *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 4 (1953), S. 90 und 168. Die erste Arbeit demonstriert das Versagen des statischen und des energetischen Stabilitätskriteriums bei einem einfachen nichtkonservativen Stabilitätsproblem, während die zweite eine grundsätzliche Analyse der linearen Stabilitätsprobleme und der Methoden zu ihrer Lösung darstellt.

[6] *A. Trösch*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 258.

[7] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 96.

[8] Auch die Berechnung des Einflusses der Torsion auf die kritischen Drehzahlen ergibt für diese drei Momente keine Überraschungen mehr. *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 377.

[9] Einen weiteren, mit dem pseudotangentialen Moment verwandten Fall, die Übertragung des Momentes durch ein Kreuzgelenk, behandelt *W. T. Koiter* in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit.

2. Grundlagen. a) Die Differentialgleichungen. Die kritische Belastung eines schlanken, geraden Stabes, der durch eine axiale Druckkraft $\vec{P}$ und durch ein vor dem Knicken axiales, konservatives Moment $\vec{W}$ (vgl. Abschnitt 2b) beansprucht ist, wird nach dem statischen Stabilitätskriterium dann erreicht, wenn zum erstenmal nicht nur für die ursprüngliche gerade, sondern auch für eine ausgebogene elastische Linie Gleichgewicht möglich ist.

Für die Ableitung der Differentialgleichungen der elastischen Linie führen wir zwei Koordinatensysteme ein (Abb. 1 und 2): das jedem Stabquerschnitt zugeordnete Hauptachsensystem (ξ, η, ζ) und ein ortsfestes System (x, y, z), dessen z-Achse parallel zur ursprünglichen Stabrichtung sein soll, während sein Ursprung sowie die x- und die y-Richtung in jedem Knickfall geeignet gewählt werden. Die Stellung der beiden Koordinatensysteme zueinander beschreiben wir mit den drei *Euler*schen Winkeln ϑ, φ, ψ (Abb. 3).

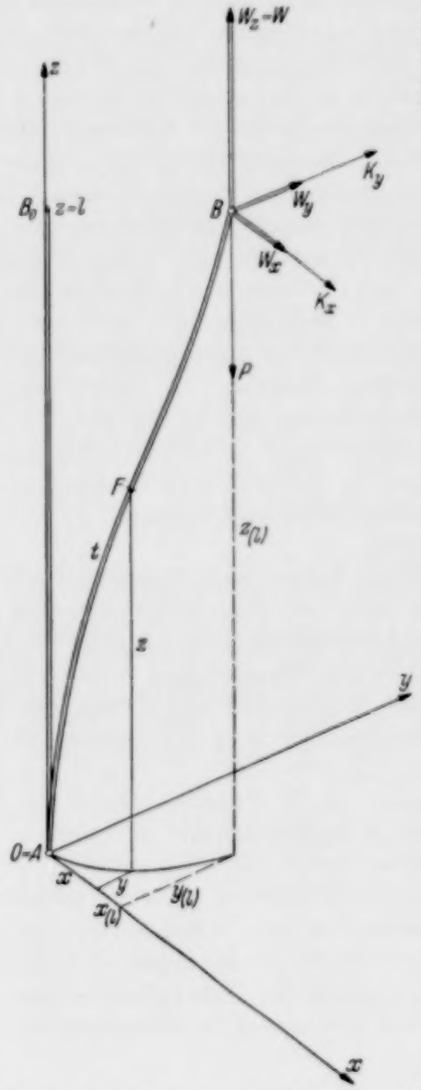


Abb. 1. Der unter einer Druckkraft und einem Torsionsmoment ausknickende Stab.

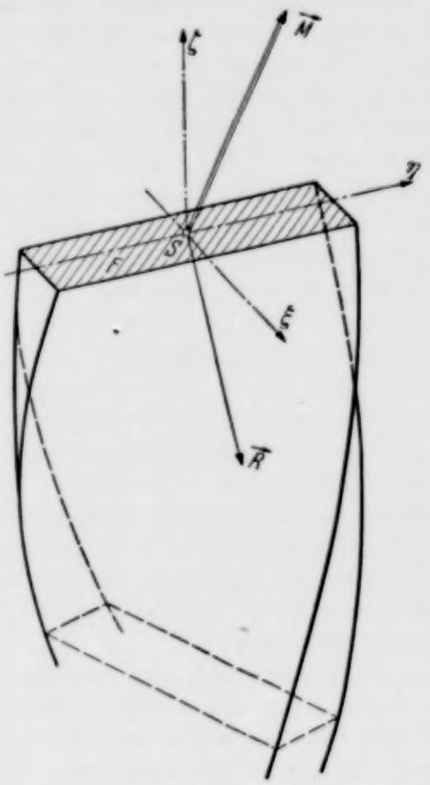


Abb. 2. Schnitt durch den knickenden Stab.

Der Stab besitze die Länge l; sein Gewicht werde vernachlässigt. Die beiden Biegesteifigkeiten α und β bezüglich der ξ-, bzw. der η-Achse werden längs des ganzen Stabes konstant vorausgesetzt, ebenso die Torsionssteifigkeit γ und der spezifische Verwindungswinkel ω_0 des unbelasteten Stabes. Die Größen $\varkappa_\xi, \varkappa_\eta, \varkappa_\zeta$ beschreiben die elastische Deformation: $\varkappa_\xi$ ist die Krümmung in der Hauptebene (η, ζ), $\varkappa_\eta$ diejenige in der (ξ, ζ)-Ebene, und $\varkappa_\zeta$ stellt den spezifischen Torsionswinkel dar. Die einzelnen Stabquerschnitte charakterisieren wir durch die vom Ursprung des (x, y, z)-Systems aus gemessene Bogenlänge t der elastischen Linie; x', y' usw. sind Ableitungen nach t.

Im Stabende B $(t = b)$ greifen ein Moment $\vec{W}$ (W_x, W_y, W_z) und eine Kraft $\vec{K}$ $(K_x, K_y, -P)$ an (Abb. 1). Dabei sind K_x und K_y Reaktionen; für gewisse Lagerungen sind es auch W_x und W_y. Die Dyname $(\vec{K}, \vec{W})$ ergibt im Querschnitt F (Abb. 2) eine Beanspruchung, die durch die Kraftschraube $(\vec{R}, \vec{M})$ wiedergegeben wird. Bei einem schlanken Stab haben wir nur das Moment $\vec{M}$ zu berücksichtigen, das im (x, y, z)-System die Komponenten (vgl. Abb. 1)

$$\left.\begin{aligned} M_x &= W_x - K_y\,[z(b) - z(t)] - P\,[y(b) - y(t)]\,, \\ M_y &= W_y + K_x\,[z(b) - z(t)] + P\,[x(b) - x(t)]\,, \\ M_z &= W_z - K_x\,[y(b) - y(t)] + K_y\,[x(b) - x(t)] \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

besitzt. Für die Umrechnung ins Hauptachsensystem gelten die mit Hilfe von Abb. 3 ableitbaren bekannten Transformationen

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= M_x(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta) + M_y(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta) \\ &\quad + M_z\sin\varphi\sin\vartheta, \\ M_\eta &= M_x(-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta) + M_y(-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta) \\ &\quad + M_z\cos\varphi\sin\vartheta, \\ M_\zeta &= M_x\sin\psi\sin\vartheta - M_y\cos\psi\sin\vartheta \\ &\quad + M_z\cos\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Der Zusammenhang

$$M_\xi = A\,\varkappa_\xi\,, \quad M_\eta = B\,\varkappa_\eta\,, \quad M_\zeta = C\,\varkappa_\zeta \qquad (2.3)$$

zwischen der Beanspruchung $\vec{M}$ und der Deformation liefert uns die Differentialgleichungen für die elastische Linie und die Torsion im (ξ, η, ζ)-System.

Wie sich durch Energiebetrachtungen begründen läßt, dürfen wir uns auf eine Theorie erster Ordnung beschränken. Kleine Größen sind $x, y \ll l$, $x', y', \vartheta \ll 1$, $\varkappa_\xi, \varkappa_\eta \ll 1/l$, ferner $M_\xi, M_\eta, W_x, W_y \ll |\vec{W}|$ und $K_x, K_y \ll P, W/l$, so daß sich, wenn wir mit $\chi = \varphi + \psi$ den Winkel zwischen der x- und der ξ-Achse bezeichnen, die Gleichungen (2.1) und (2.2) auf

$$\left.\begin{aligned} M_x &= W_x - K_y(b-t) - P[y(b) - y(t)]\,, \\ M_y &= W_y + K_x(b-t) + P[x(b) - x(t)]\,, \quad M_z = W_z = W, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1a)$$

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= M_x\cos\chi + M_y\sin\chi + W\vartheta\sin\varphi\,, \\ M_\eta &= -M_x\sin\chi + M_y\cos\chi + W\vartheta\cos\varphi\,, \quad M_\zeta = M_z = W \end{aligned}\right\} \qquad (2.2a)$$

reduzieren.

Um (2.3) auf geeignete Variabeln transformieren zu können, drücken wir $\varkappa_\xi, \varkappa_\eta, \varkappa_\zeta$ durch die Winkel ϑ, φ, ψ und ihre Ableitungen aus. Durchlaufen wir gleichförmig die elastische Linie, so bedeuten $\varkappa_\xi, \varkappa_\eta, \varkappa_\zeta + \omega_0$ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Hauptachsensystems. Die gesuchten Beziehungen sind also die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_\xi &= \psi'\sin\varphi\sin\vartheta + \vartheta'\cos\varphi\,, \\ \varkappa_\eta &= \psi'\cos\varphi\sin\vartheta - \vartheta'\sin\varphi\,, \\ \varkappa_\zeta + \omega_0 &= \psi'\cos\vartheta + \varphi' \\ &(\sin\vartheta \approx \vartheta,\ \cos\vartheta \approx 1) \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

der Winkelgeschwindigkeit der Kreiseltheorie. Die dritte Gleichung von (2.3) lautet nun $W = C(\chi' - \omega_0)$ und führt mit $\omega^* = W/C$ auf

$$\chi = (\omega^* + \omega_0)t + \delta = \omega t + \delta, \quad (2.5)$$

wobei δ eine Integrationskonstante ist.

Die einfachste Darstellung der folgenden Rechnungen erhalten wir mit den Variabeln

$$f(t) = \vartheta\cos\varphi\,, \quad g(t) = \vartheta\sin\varphi\,,$$
$$\chi(t) = \psi + \varphi\,. \qquad (2.6)$$

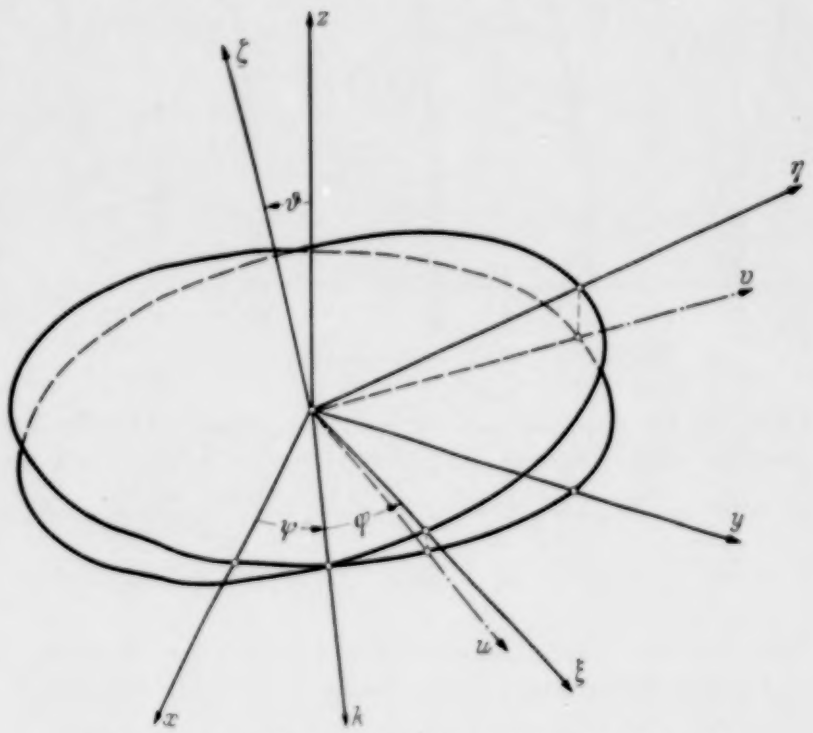


Abb. 3. Die Koordinatensysteme (x, y, z), (ξ, η, ζ) und (u, v, z).

Geometrisch bedeuten f, g die negativen Komponenten des Tangenteneinheitsvektors $\vec{v}$ der elastischen Linie im aufgerichteten Koordinatensystem (u, v, z) von Abb. 3: $f = -v_v, g = -v_u$. Mit den Komponenten x', y' von $\vec{v}$ im (x, y, z)-System sind f, g somit durch die Beziehungen

$$x' = f\sin(\omega t + \delta) - g\cos(\omega t + \delta)\,, \quad y' = -f\cos(\omega t + \delta) - g\sin(\omega t + \delta)\,, \quad (2.7)$$

$$f = x'\sin(\omega t + \delta) - y'\cos(\omega t + \delta)\,, \quad g = -x'\cos(\omega t + \delta) - y'\sin(\omega t + \delta) \quad (2.8)$$

verbunden.

Aus (2.4) gewinnen wir mit den neuen Variabeln die Ausdrücke $\varkappa_\xi = f' + \omega g$, $\varkappa_\eta = -g' + \omega f$, die wir zusammen mit M_ξ, M_η aus (2.2a) in (2.3) einsetzen. Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha f' + (\alpha\omega - W) g &= M_x \cos(\omega t + \delta) + M_y \sin(\omega t + \delta), \\ \beta g' - (\beta\omega - W) f &= M_x \sin(\omega t + \delta) - M_y \cos(\omega t + \delta), \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

welche sich in dieser Form für die Behandlung des nur durch ein Torsionsmoment belasteten Stabes eignen. Die Druckkraft führt indessen nach (2.1a) auch x, y und damit die Integrale von f, g in (2.9) ein, so daß diese Beziehungen [unter Berücksichtigung von (2.7)] nach t abgeleitet werden müssen und wir beim gedrückten und tordierten Stab von den Differentialgleichungen [1]

$$\left.\begin{aligned} \alpha f'' + [(\alpha+\beta)\omega - W] g' + (W\omega - \beta\omega^2 + P) f &= K_y \cos(\omega t + \delta) - K_x \sin(\omega t + \delta), \\ \beta g'' - [(\alpha+\beta)\omega - W] f' + (W\omega - \alpha\omega^2 + P) g &= K_y \sin(\omega t + \delta) + K_x \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

auszugehen haben. Die weiterhin gültigen Gleichungen (2.9) ergeben die Randbedingungen in den nicht eingespannten Stabenden.

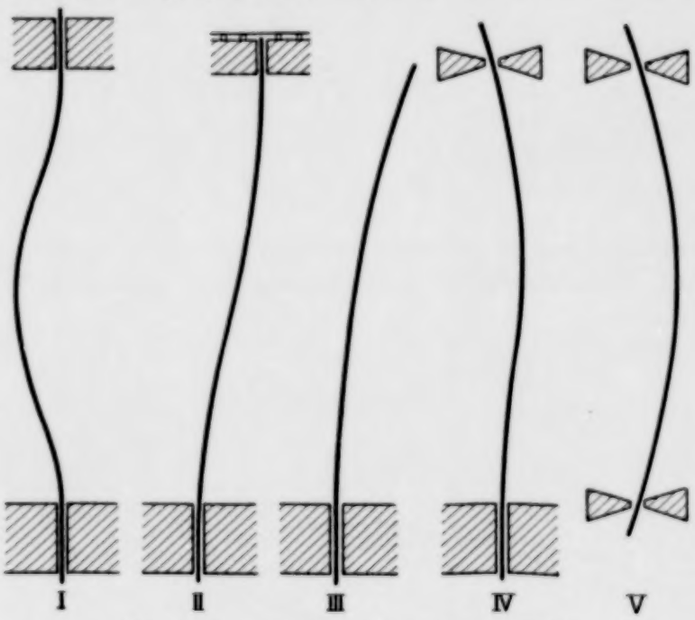


Abb. 4. Die untersuchten Lagerungen des Stabes.

Die kritische Belastung ist die kleinste, für welche die Gleichungen (2.9) bzw. (2.10) eine die Randbedingungen erfüllende nichttriviale Lösung besitzen. Wir untersuchen die folgenden fünf Arten der Lagerung (vgl. Abb. 4):

I. den beidseitig eingespannten Stab,

II. den beidseitig eingespannten Stab mit gegeneinander verschiebbaren und um die ursprüngliche Stabachse verdrehbaren Einspannungen,

III. den einseitig eingespannten Stab,

IV. den auf der einen Seite eingespannten, auf der andern gelenkig gelagerten Stab,

V. den beidseitig gelenkig gelagerten Stab.

b) Konservative Torsionsmomente. Das belastende Moment (Abb. 1) ist dann konservativ, wenn seine virtuelle Arbeit als Variation eines Potentials dargestellt werden kann. Für die virtuelle Arbeit δA_W der Momente in den beiden Stabenden B und A, $\vec{W}_B (W_{bx}, W_{by}, W_{bz} = +W)$ und $\vec{W}_A (W_{ax}, W_{ay}, W_{az} = -W)$, erhalten wir

$$\delta A_W = W \int_a^b \delta\varkappa_z \, dt - (W_{bx}\,\delta y_b' - W_{by}\,\delta x_b') - (W_{ax}\,\delta y_a' - W_{ay}\,\delta x_a') \tag{2.11}$$

($\delta\varkappa_z$ ist die z-Komponente des vektoriellen Winkels, um den der Stab pro Längeneinheit virtuell gedreht wird). Gleichung (2.11) läßt sich auf [2]

$$\begin{aligned} \delta A_W = \delta\left[\frac{1}{2} W \int_a^b (x'\,y'' - y'\,x'' + 2\omega)\,dt\right] &+ \left[\left(W_{by} - \frac{1}{2} W_{bz}\,y_b'\right)\delta x_b' - \left(W_{bx} - \frac{1}{2} W_{bz}\,x_b'\right)\delta y_b'\right] \\ &+ \left[\left(W_{ay} - \frac{1}{2} W_{az}\,y_a'\right)\delta x_a' - \left(W_{ax} - \frac{1}{2} W_{az}\,x_a'\right)\delta y_a'\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

umformen. Auch den Randtermen muß ein Potential zugeordnet werden können. Damit das

[1] Die Gleichungen (2.10) entsprechen den Beziehungen (6.1) bei *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2 (1951), S. 274.

[2] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 105.

möglich wird, ist an beiden Stabenden die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(W_y - \frac{1}{2} W_z y'\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{2} W_z x' - W_x\right) \tag{2.13}$$

zu erfüllen. Es sind W_x, W_y kleine Größen; um sie als Funktionen von x', y' darzustellen, genügt deshalb ein Ansatz

$$W_x = W_z (A^* x' + B^* y'), \qquad W_y = W_z (C^* x' + D^* y').$$

Die Bedingung (2.13) verlangt, daß

$$A^* + D^* = 1 \tag{2.14}$$

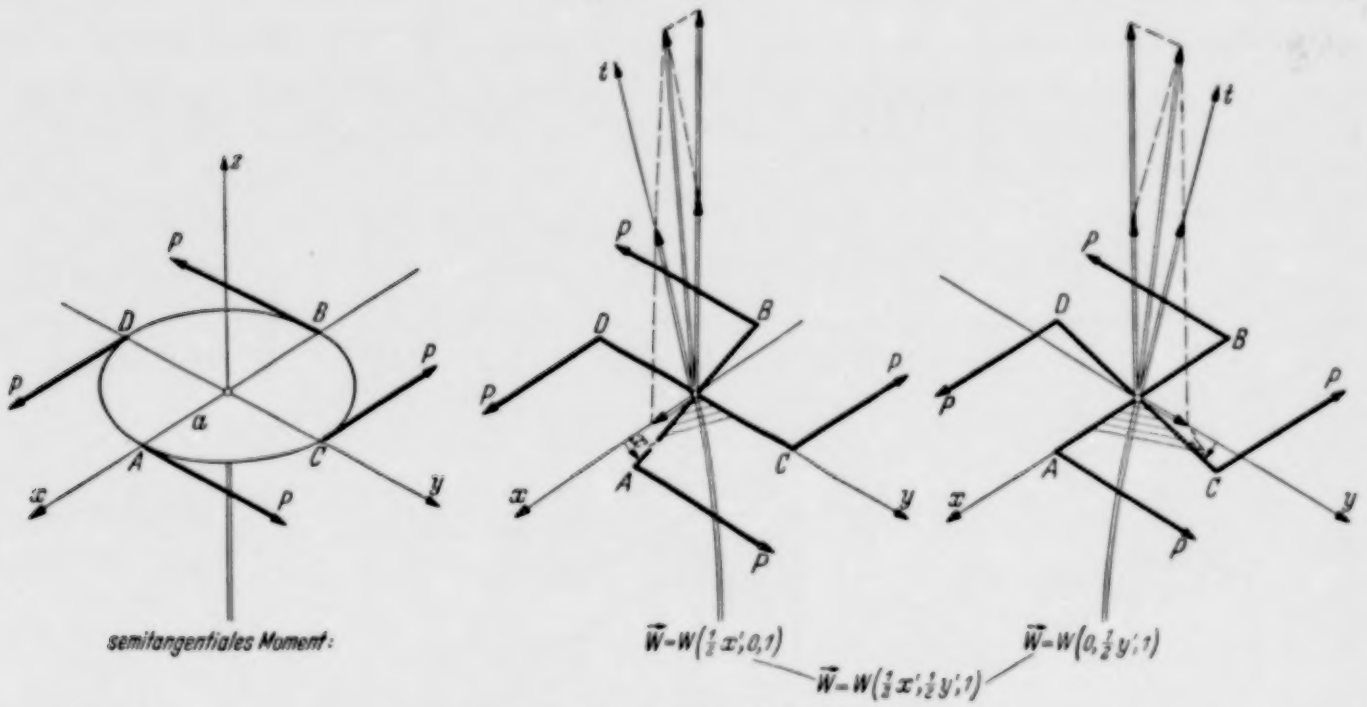


Abb. 5a. Das semitangentiale Moment.

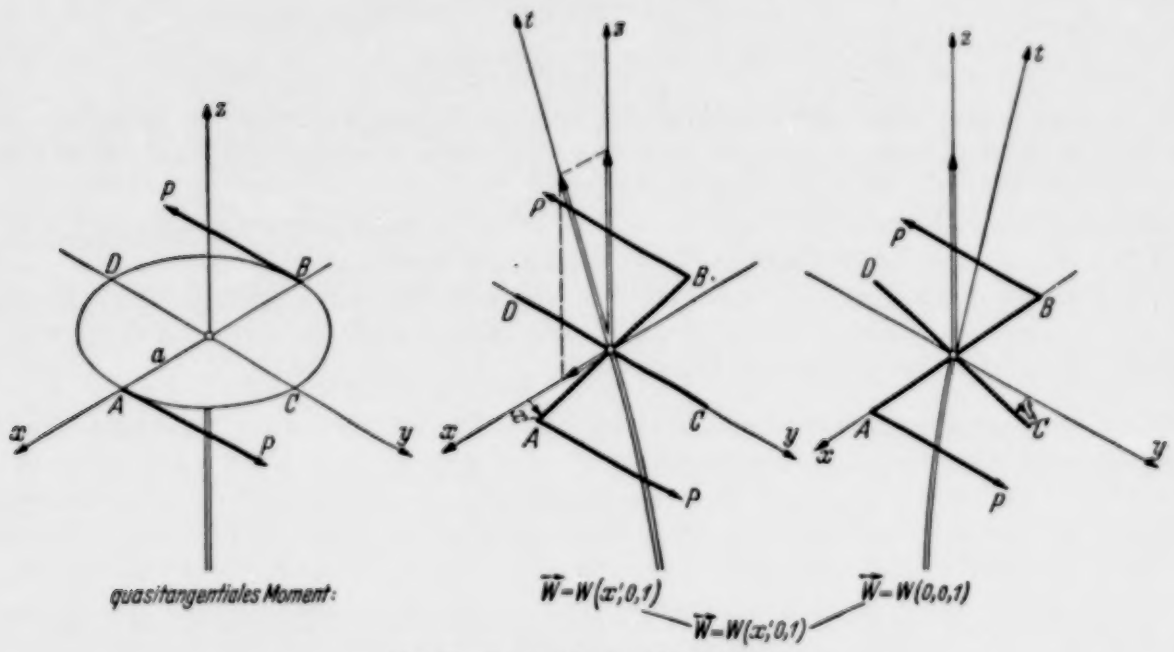


Abb. 5b. Das quasitangentiale Moment.

sei. Bei einem konservativen Moment treten also beim Ausknicken die Komponenten

$$W_x = W_z (A^* x' + B^* y'), \quad W_y = W_z [C^* x' + (1 - A^*) y'] \tag{2.15}$$

auf. Die einfachsten konservativen Momente erhält man für $A^* = D^* = \frac{1}{2}$, $B^* = C^* = 0$

$$W_x = \frac{1}{2} W_z x', \qquad W_y = \frac{1}{2} W_z y' \quad \text{(semitangentiales Moment)}$$

und für $A^* = 1$, $B^* = C^* = D^* = 0$

$$W_x = W_z\, x', \qquad W_y = 0 \qquad \text{(quasitangentiales Moment).}$$

Diese beiden Momente lassen sich, wie aus Abb. 5 hervorgeht, durch einfache Kräfteverteilungen verwirklichen [1]. Das semitangentiale Moment gehört zu einer gleichmäßigen Verteilung von drei oder mehr Kräften von gleichem, konstantem Betrag und konstanter Richtung, die an einer zum Stab normalen, starr mit ihm verbundenen Scheibe angreifen. Ein quasitangentiales Moment entsteht, wenn nur zwei solche Kräfte auf die Scheibe wirken. Greift dieses Kräftepaar an einem rechtwinklig und starr mit dem Stab verbundenen Querbalken an, liegt ein pseudotangentiales Moment vor mit $A^* = 1$, $B^* = \operatorname{tg}\tau$ und $C^* = D^* = 0$:

$$W_x = W_z\,(x' + \operatorname{tg}\tau \cdot y') = W_{0z} \cos\tau\,(x' + \operatorname{tg}\tau \cdot y'); \qquad W_y = 0 \quad (W_{0z} = 2\,a\,P).$$

Dabei ist τ der Drehwinkel des Querstabes. Beim pseudotangentialen Moment sind zwei Fälle zu unterscheiden: ist der Stab im zweiten Ende starr eingespannt (*a*), so ist $\tau = (W/\gamma)\,l = \omega^*\,l$:

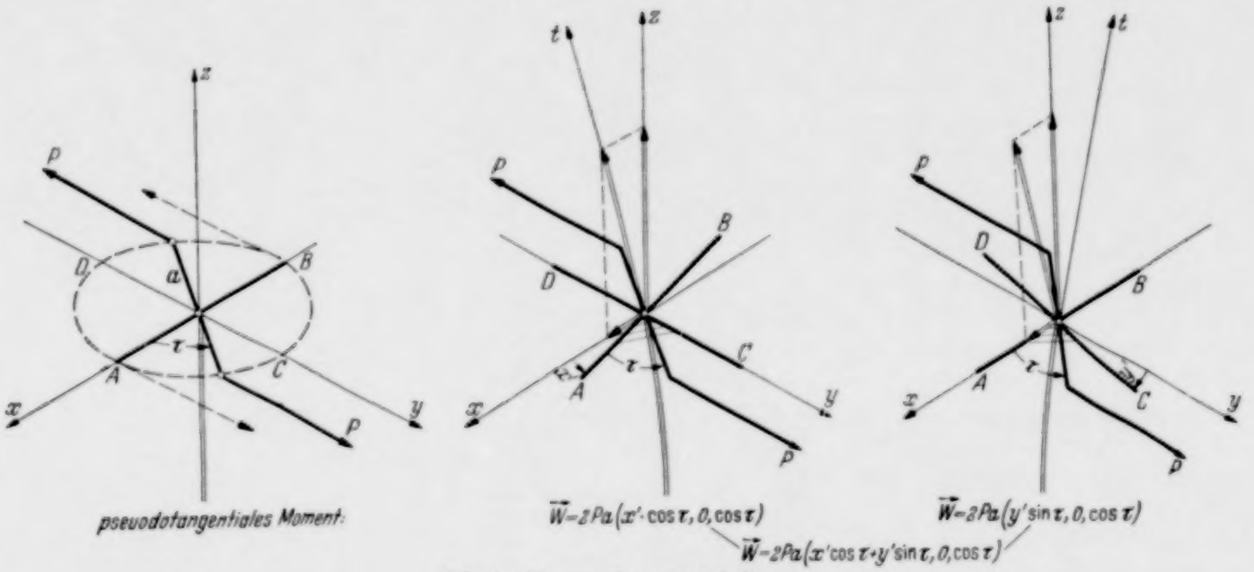


Abb. 5c. Das pseudotangentiale Moment.

kann er sich in jenem Ende axial drehen (b), so verteilt sich die durch W bewirkte Torsion: $\tau = Wl/2\,\gamma = \omega^*\,l/2$. Da τ höchstens den Wert $\pi/2$ erreichen kann, ist auch W beschränkt: $W \leqq \pi\,\gamma/2\,l$ im Fall (a), $W \leqq \pi\,\gamma/l$ im Fall (b).

Weder das axiale Moment ($A^* = B^* = C^* = D^* = 0$) noch das tangentiale ($A^* = D^* = 1$, $B^* = C^* = 0$) erfüllen die Bedingung (2.14); beide sind deshalb nichtkonservativ.

Bei den Lagerungen I und II muß die Stabtangente in beiden Enden ihre Richtung beibehalten: $\delta x'_b = \delta y'_b = \delta x'_a = \delta y'_a = 0$, und die Randterme in (2.12) fallen weg. Das belastende Moment ist somit immer konservativ.

3. Knickung gerader Stäbe durch konservative Torsion bei zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten und spannungsloser Verwindung. a) Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen. Die Bestimmungsgleichung für das kritische Torsionsmoment geht beim Fehlen einer Druckkraft aus den Differentialgleichungen (2.9) hervor. Diese lauten, wenn wir (2.1a) mit $P = 0$ einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha f' + (\alpha\,\omega - W)\,g &= (W_x - K_y\,b)\cos(\omega\,t + \delta) + (W_y + K_x\,b)\sin(\omega\,t + \delta) \\ &\quad + K_y\,t\cos(\omega\,t + \delta) - K_x\,t\sin(\omega\,t + \delta), \\ \beta\,g' - (\beta\,\omega - W)\,f &= (W_x - K_y\,b)\sin(\omega\,t + \delta) - (W_y + K_x\,b)\cos(\omega\,t + \delta) \\ &\quad + K_y\,t\sin(\omega\,t + \delta) + K_x\,t\cos(\omega\,t + \delta). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\alpha f' + (\alpha\,\omega - W)\,g = 0, \quad \beta\,g' - (\beta\,\omega - W)\,f = 0$$

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 99.

lösen wir mit dem Ansatz

$$f_h = A_0 \cos \lambda t + B_0 \sin \lambda t, \quad g_h = C_0 \cos \lambda t + D_0 \sin \lambda t.$$

Dieser führt auf die charakteristische Gleichung mit der Wurzel

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\alpha \omega - W)(\beta \omega - W)}{\alpha \beta}} \tag{3.2}$$

und auf die Beziehung zwischen den Koeffizienten

$$C_0 = -q B_0, \qquad D_0 = q A_0 \qquad \left(q = \frac{\alpha \lambda}{\alpha \omega - W}\right).$$

[λ ist immer positiv oder positiv imaginär; um das Vorzeichen von q klar festzulegen, soll der Ausdruck dafür nicht durch Einsetzen von (3.2) vereinfacht werden.]

Die partikuläre Lösung ist die Summe von zwei partikulären Integralen

$$f_1 = A_1 \cos(\omega t + \delta) + B_1 \sin(\omega t + \delta), \quad g_1 = C_1 \cos(\omega t + \delta) + D_1 \sin(\omega t + \delta),$$
$$f_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta) + B_2 \sin(\omega t + \delta) + E t \cos(\omega t + \delta) + F t \sin(\omega t + \delta),$$
$$g_2 = C_2 \cos(\omega t + \delta) + D_2 \sin(\omega t + \delta) + G t \cos(\omega t + \delta) + H t \sin(\omega t + \delta),$$

von denen das erste die Störglieder ohne den Faktor t, das zweite diejenigen mit diesem Faktor berücksichtigt. Für die einzelnen Koeffizienten ergibt die Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= D_1 = -\frac{W_y + b K_x}{W}, & B_1 &= -C_1 = \frac{W_x - b K_y}{W}, \\
A_2 &= \frac{\beta (2\alpha \omega - W) K_y}{[(\alpha + \beta)\omega - W] W^2}, & B_2 &= -\frac{\beta (2\alpha \omega - W) K_x}{[(\alpha + \beta)\omega - W] W^2}, \\
C_2 &= \frac{\alpha (2\beta \omega - W) K_x}{[(\alpha + \beta)\omega - W] W^2}, & D_2 &= -\frac{\alpha (2\beta \omega - W) K_y}{[(\alpha + \beta)\omega - W] W^2}, \\
E &= H = \frac{K_x}{W}, & F &= -G = \frac{K_y}{W}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Beim Zusammenfügen der einzelnen Bestandteile $f_h + f_1 + f_2$, $g_h + g_1 + g_2$ der allgemeinen Lösung von (3.1) führen wir noch die Abkürzungen

$$A_{12} = A_1 + A_2, \quad B_{12} = B_1 + B_2, \quad n = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta)\omega - W}$$

ein, berücksichtigen ferner die Beziehungen

$$C_1 + C_2 = -B_1 - B_2 - n E, \quad D_1 + D_2 = A_1 + A_2 - n F$$

und erhalten damit

$$\left.\begin{aligned}
f(t) &= A_0 \cos \lambda t + B_0 \sin \lambda t + A_{12} \cos(\omega t + \delta) + B_{12} \sin(\omega t + \delta) + E t \cos(\omega t + \delta) \\
&\quad + F t \sin(\omega t + \delta), \\
g(t) &= -q B_0 \cos \lambda t + q A_0 \sin \lambda t - (B_{12} + n E) \cos(\omega t + \delta) + (A_{12} - n F) \sin(\omega t + \delta) \\
&\quad - F t \cos(\omega t + \delta) + E t \sin(\omega t + \delta).
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Wir suchen nun die zu den Lagerungen I bis V gehörenden speziellen Lösungen, beschränken uns jedoch in den Fällen IV und V auf das semitangentiale Moment.

b) Die Knickfälle III und II. Da sich das Lager B gegenüber A in der x- und y-Richtung frei verschieben kann, tritt keine Lagerkraft $\vec{K}$ auf: $K_x = K_y = 0$. Die Ausdrücke (3.4) für f und g vereinfachen sich deshalb wesentlich:

$$\left.\begin{aligned}
f(t) &= A_0 \cos \lambda t + B_0 \sin \lambda t - \frac{W_y}{W} \cos(\omega t + \delta) + \frac{W_x}{W} \sin(\omega t + \delta), \\
g(t) &= -q B_0 \cos \lambda t + q A_0 \sin \lambda t - \frac{W_x}{W} \cos(\omega t + \delta) - \frac{W_y}{W} \sin(\omega t + \delta).
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

In beiden Fällen legen wir den Ursprung des (x, y, z)-Systems in das eingespannte Stabende A. Der Neigungswinkel ϑ der Stabtangente in A (Abb. 3) hat dauernd den Wert Null; für $t = a = 0$

sind somit [vgl. (2.6)] die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= A_0 - \frac{W_y}{W}\cos\delta + \frac{W_x}{W}\sin\delta = 0\,, \\ g(0) &= -qB_0 - \frac{W_x}{W}\cos\delta - \frac{W_y}{W}\sin\delta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

zu erfüllen.

In den nicht eingespannten Stabenden ergeben sich die Randbedingungen daraus, daß die Größen W_x, W_y, die zwar nach (3.3), bzw. (3.5) den Verlauf der elastischen Linie bestimmen, ihrerseits nach Abschnitt 2b durch die Tangentenrichtung in diesen Stabenden festgelegt sind.

α) Fall III, semitangentiales Moment. Das Moment in B schreibt keine x-Richtung vor; wir können diese mit der ξ-Richtung im Einspannquerschnitt A zusammenfallen lassen und erreichen damit das Verschwinden der Integrationskonstanten δ. Aus (3.5) und (3.6) gehen dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{W_y}{W}(\cos\lambda t - \cos\omega t) + \frac{W_x}{W}\left(-\frac{1}{q}\sin\lambda t + \sin\omega t\right), \\ g(t) &= \frac{W_y}{W}(q\sin\lambda t - \sin\omega t) + \frac{W_x}{W}(\cos\lambda t - \cos\omega t) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

hervor. Wir formulieren sie speziell für $t = l$ und stellen diese Ausdrücke für $f(l)$, $g(l)$ denjenigen gegenüber, die bei einem Moment mit $W_x = \frac{W}{2}x'(l)$, $W_y = \frac{W}{2}y'(l)$ aus (2.8) gewonnen werden:

$$f(l) = 2\frac{W_x}{W}\sin\omega l - 2\frac{W_y}{W}\cos\omega l\,,$$

$$g(l) = -2\frac{W_x}{W}\cos\omega l - 2\frac{W_y}{W}\sin\omega l\,.$$

Auf diese Weise entstehen die beiden homogenen, linearen Gleichungen

$$\frac{W_x}{W}\left(-\frac{1}{q}\sin\lambda l - \sin\omega l\right) + \frac{W_y}{W}(\cos\lambda l + \cos\omega l) = 0\,,$$

$$\frac{W_x}{W}(\cos\lambda l + \cos\omega l) + \frac{W_y}{W}(q\sin\lambda l + \sin\omega l) = 0$$

für W_x, W_y (und damit für B_0, A_0). Die Bedingung für nichttriviale Lösungen

$$2 + 2\cos\lambda l\cos\omega l + \left(q + \frac{1}{q}\right)\sin\lambda l\sin\omega l = 0 \tag{3.8}$$

(III, semitangentiales Moment)

gibt implizit den Wert des kritischen Moments an. Die Knickgleichung läßt sich in ein Produkt aufspalten:

$$\left(\operatorname{ctg}\lambda\frac{l}{2} + q\operatorname{tg}\omega\frac{l}{2}\right)\left(q\operatorname{ctg}\lambda\frac{l}{2} + \operatorname{tg}\omega\frac{l}{2}\right) = 0\,. \tag{3.8a}$$

Mit dem Ursprung des (x, y, z)-Systems in der Stabmitte führen die Rechnungen direkt auf diese Form der Knickgleichung. Die Knicklast wird durch die schärfere der beiden in (3.8a) enthaltenen Forderungen bestimmt.

β) Fall III, quasitangentiales Moment. Wenn wir das Moment in B darstellen als $\vec{W} = W(x'(l), 0, 1)$, ist nach Abb. 5b die x-Achse festgelegt. Der Winkel δ ist nicht mehr Null, hingegen vereinfacht sich (3.6) durch $W_y = 0$. Statt (3.7) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= -\frac{W_x}{W}\left[\sin\delta\cos\lambda t + \frac{1}{q}\cos\delta\sin\lambda t - \sin(\omega t + \delta)\right], \\ g(t) &= \frac{W_x}{W}[\cos\delta\cos\lambda t - q\sin\delta\sin\lambda t - \cos(\omega t + \delta)]\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Die mit (2.7) gebildete Beziehung

$$\frac{W_x}{W} = x'(l) = f(l)\sin(\omega l + \delta) - g(l)\cos(\omega l + \delta)$$

wird zur Knickgleichung, sobald darin für $f(l)$, $g(l)$ die Ausdrücke (3.9) eingesetzt sind:

$$\cos\lambda l\cos\omega l + \sin\lambda l\left[\frac{1}{q}\cos\delta\sin(\omega l + \delta) - q\sin\delta\cos(\omega l + \delta)\right] = 0\,. \qquad (3.10)$$

(III, quasitangentiales Moment)

γ) Fall III, pseudotangentiales Moment. Wählen wir die x-Richtung so, wie es Abb. 5c verlangt, so gelten auch hier die Gleichungen (3.9). Der Momentvektor hat im Fall (a), d. h. beim in A starr eingespannten Stab (vgl. Abschnitt 2 b), die Komponenten $W_x = W\left(x'(l) + y'(l)\,\mathrm{tg}\,\omega^* l\right)$, $W_y = 0$; aus (2.7), (2.5) folgt

$$\frac{W_x}{W}\cos\omega^* l = f(l)\sin(\omega_0 l + \delta) - g(l)\cos(\omega_0 l + \delta)\,,$$

und nach der Substitution von (3.9) für $f(l)$, $g(l)$ entsteht daraus die Knickgleichung

$$\cos\lambda l\cos\omega_0 l + \sin\lambda l\left[\frac{1}{q}\cos\delta\sin(\omega_0 l + \delta) - q\sin\delta\cos(\omega_0 l + \delta)\right] = 0\,. \quad (3.11a)$$

[III, pseudotangentiales Moment (a)]

Das gleiche Vorgehen ergibt im Fall (b) (Stab in A drehbar)

$$\cos\lambda l\cos\left[\left(\frac{\omega^*}{2} + \omega_0\right) l\right] + \sin\lambda l\left\{\frac{1}{q}\cos\delta\sin\left[\left(\frac{\omega^*}{2} + \omega_0\right) l + \delta\right]\right.$$
$$\left. - q\sin\delta\cos\left[\left(\frac{\omega^*}{2} + \omega_0\right)(l + \delta\right]\right\} = 0\,. \qquad (3.11b)$$

[III, pseudotangentiales Moment (b)]

δ) Fall II. Die Komponenten W_x, W_y des Moments in B sind Reaktionen. Wie im Fall III (semitangential) können wir die x-Richtung so wählen, daß die Beziehungen (3.7) gelten. Im eingespannten Stabende B müssen die Forderungen $f(l) = 0$, $g(l) = 0$ erfüllt sein. Sie verwandeln (3.7) in zwei homogene Gleichungen für W_x, W_y, die auf die Knickbedingung

$$2 - 2\cos\lambda l\cos\omega l - \left(q + \frac{1}{q}\right)\sin\lambda l\sin\omega l = 0 \qquad \text{(II)} \qquad (3.12)$$

oder

$$\left(q\,\mathrm{tg}\,\lambda\frac{l}{2} - \mathrm{tg}\,\omega\frac{l}{2}\right)\left(\mathrm{tg}\,\lambda\frac{l}{2} - q\,\mathrm{tg}\,\omega\frac{l}{2}\right) = 0$$

führen.

Hier wie auch im Knickfall I, ist es für die Größe des kritischen Moments unwichtig, mit welcher Kräfteanordnung es erzeugt wird.

c) Die Knickfälle I, IV und V. Bei den Lagerungen I, IV und V sorgt die Lagerkraft (Abb. 1) dafür, daß das Stabende B sich nicht senkrecht zur ursprünglichen Stabachse verschiebt. A und B müssen also dieselben x- und y-Koordinaten aufweisen:

$$x\left(\frac{l}{2}\right) - x\left(-\frac{l}{2}\right) = \int_{-l/2}^{+l/2} x'\,dt = 0\,, \quad y\left(\frac{l}{2}\right) - y\left(-\frac{l}{2}\right) = \int_{-l/2}^{+l/2} y'\,dt = 0\,. \qquad (3.13)$$

(Die Stabmitte sei der Ursprung des ortsfesten Koordinatensystems.) Die Integranden sind mit Hilfe von (2.7) auf die Variabeln f, g zu transformieren. Falls bei IV und V nur semitangentiale Momente berücksichtigt werden, darf in den Ausdrücken (3.4) für f, g die Integrationskonstante δ weggelassen werden. Bei der Integration von (3.13) führen wir noch die Abkürzungen

$$r = \frac{\alpha\,(2\,\beta\,\omega - W)}{[(\alpha + \beta)\,\omega - W]\,W\,l}\,, \qquad s = \frac{\beta\,(2\,\alpha\,\omega - W)}{[(\alpha + \beta)\,\omega - W]\,W\,l}$$

ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} B_0\left(-2\,r\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2\,s\,q\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}\right)+B_{12}+E\,n\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega\,l}\right)=0\,,\\ A_0\left(-2\,s\,q\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2\,r\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}\right)+A_{12}-F\,n\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega\,l}\right)=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.13a}$$

α) Fall I. Die Lagerungen in A und B sind Einspannungen, in denen f, g den Wert Null beibehalten. Wir können somit die Beziehungen

$$f\left(\frac{l}{2}\right)+f\left(-\frac{l}{2}\right)=0\,,\quad g\left(\frac{l}{2}\right)+g\left(-\frac{l}{2}\right)=0\,,\quad f\left(\frac{l}{2}\right)-f\left(-\frac{l}{2}\right)=0\,,\quad g\left(\frac{l}{2}\right)-g\left(-\frac{l}{2}\right)=0$$

aufstellen, die zusammen mit (3.13a) je drei homogene, lineare Gleichungen für A_0, A_{12}, F und B_0, B_{12}, E bilden. Eine der beiden Koeffizientendeterminanten muß beim Ausknicken Null sein, entweder

$$\left.\begin{vmatrix} -2\,s\,q\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2\,r\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & -n\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega\,l}\right)\\ \cos\lambda\frac{l}{2} & \cos\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}\\ q\sin\lambda\frac{l}{2} & \sin\omega\frac{l}{2} & -\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}-n\sin\omega\frac{l}{2} \end{vmatrix}=0\right\} \tag{3.14}$$

oder

$$\left.\begin{vmatrix} -2\,r\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2\,s\,q\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & n\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega\,l}\right)\\ \sin\lambda\frac{l}{2} & \sin\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}\\ -q\cos\lambda\frac{l}{2} & -\cos\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}-n\cos\omega\frac{l}{2} \end{vmatrix}=0.\right\}$$

Welche der beiden Forderungen das kleinere Knickmoment liefert, hängt vom Verhältnis von α, β und γ, sowie von ω_0 ab.

β) Fall IV, semitangentiales Moment. Die Randbedingungen in A stimmen mit denen des Knickfalls I überein: $f(-l/2)=0$, $g(-l/2)=0$. Im Gelenklager B lassen sich W_x/W und W_y/W auf zwei Arten durch die zu bestimmenden Koeffizienten der allgemeinen Lösung (3.4) ausdrücken: erstens indem wir (3.3) mit $b=l/2$ und unter Verwendung der eingeführten Abkürzungen nach jenen Größen auflösen, und zweitens indem wir berücksichtigen, daß W_x und W_y die Komponenten eines semitangentialen Momentes sind

$$\left.\begin{aligned} \frac{W_x}{W}&=B_{12}+F\frac{l}{2}+E\,s\,l=\frac{1}{2}\,x'\left(\frac{l}{2}\right),\\ \frac{W_y}{W}&=-A_{12}-E\frac{l}{2}+F\,s\,l=\frac{1}{2}\,y'\left(\frac{l}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

[rechts setze man zunächst (2.7) dann (3.4) ein]. Nach Ergänzung der vier für die Stabenden A und B aufgestellten Forderungen durch (3.13a) wird die Knickgleichung durch Nullsetzen der Determinante dieses Gleichungssystems gebildet. Diese läßt sich zwar auf (3.16) vereinfachen aber nicht in ein Produkt aufspalten, da die Randbedingungen nicht symmetrisch sind [die linke Seite von (3.16) ist al: 6-reihige Determinante zu lesen]:

$$\begin{vmatrix}
-2qs\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2r\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & -n\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega l}\right)\\
\cos\lambda\frac{l}{2} & 0 & s\,l\cos\omega\frac{l}{2}\\
-q\sin\lambda\frac{l}{2} & 0 & -r\,l\sin\omega\frac{l}{2}\\
0 & 0 & 0\\
0 & \cos\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}-s\,l\cos\omega\frac{l}{2}\\
0 & -\sin\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+s\,l\sin\omega\frac{l}{2}\\
0 & 0 & 0\\
0 & -\sin\omega\frac{l}{2} & -\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}-s\,l\sin\omega\frac{l}{2}\\
0 & -\cos\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}-s\,l\cos\omega\frac{l}{2}\\
-2r\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2sq\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & n\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega l}\right)\\
-\sin\lambda\frac{l}{2} & 0 & s\,l\sin\omega\frac{l}{2}\\
-q\cos\lambda\frac{l}{2} & 0 & r\,l\cos\omega\frac{l}{2}
\end{vmatrix}=0.$$

(IV, semitangentiales Moment) (3.16)

γ) **Fall V, zwei semitangentiale Momente.** Die Beziehungen (3.13a) und (3.15) können als Randbedingungen sofort übernommen werden. Die (3.15) entsprechenden Gleichungen für das Gelenklager A, in dem das Moment ebenfalls semitangential eingeführt wird, lauten

$$\left.\begin{aligned}
\frac{M_x\left(-\frac{l}{2}\right)}{W}&=\frac{W_x}{W}-\frac{K_y\,l}{W}=B_{12}-F\frac{l}{2}+E\,s\,l=\frac{1}{2}x'\left(-\frac{l}{2}\right),\\
\frac{M_y\left(-\frac{l}{2}\right)}{W}&=\frac{W_y}{W}+\frac{K_x\,l}{W}=-A_{12}+E\frac{l}{2}+F\,s\,l=\frac{1}{2}y'\left(-\frac{l}{2}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(3.17)$$

Diese Randbedingungen führen auf die beiden Knickgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
-2qs\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2r\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & -n\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega l}\right)\\
\cos\lambda\frac{l}{2} & -\cos\omega\frac{l}{2} & -\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}+2s\,l\cos\omega\frac{l}{2}\\
q\sin\lambda\frac{l}{2} & -\sin\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+(2s\,l-n)\sin\omega\frac{l}{2}
\end{vmatrix}=0,\\
&\begin{vmatrix}
-2r\sin\lambda\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}+2qs\cos\lambda\frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2} & 1 & n\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\omega\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}}{\omega l}\right)\\
\sin\lambda\frac{l}{2} & -\sin\omega\frac{l}{2} & -\frac{l}{2}\cos\omega\frac{l}{2}-2\,s\,l\sin\omega\frac{l}{2}\\
q\cos\lambda\frac{l}{2} & -\cos\omega\frac{l}{2} & \frac{l}{2}\sin\omega\frac{l}{2}-(2s\,l-n)\cos\omega\frac{l}{2}
\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.18)$$

(V, zwei semitangentiale Momente)

d) Die Auswertung der Knickgleichungen. Um für eine vorgegebene Welle das Knickmoment zu ermitteln, hat man in die zugehörige Knickgleichung $\Omega\,(W, \alpha/\gamma, \beta/\gamma, \omega_0, \delta)$ zunächst die Zahlenwerte für α/γ, β/γ, ω_0, δ einzusetzen und darauf Ω mit Versuchswerten für W solange abzutasten, bis man der Nullstelle mit dem kleinsten W genügend nahe ist. Obschon einzelne Knickgleichungen nicht leicht zu überblicken sind, gelangt man auch dort mit einer Handrechenmaschine relativ rasch zum Ziel. Die drei folgenden Hinweise werden das Aufsuchen der Knickmomente in vielen Fällen erleichtern.

α) Pseudotangentiale Momente. Für den durch ein pseudotangentiales Moment belasteten Stab besteht im Fall (a) keine Knickgefahr. Mit $\omega_0 = 0$, $\delta = 0, \pi/2$ läßt sich die Knickgleichung (3.11a) der Lagerung III

$$\cos\left(\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\alpha\,\beta}}\,|\omega^*|\,l\right) = 0$$

unter den allgemein gültigen Bedingungen $(\alpha+\beta) > \gamma$, $2\alpha > \gamma$, $2\beta > \gamma$ mit $|\omega^*|\,l < \pi/2$ nie lösen. Auch für die übrigen Werte von δ und für $\omega_0 \neq 0$ wird, wie eine ausführliche Untersuchung gezeigt hat, mit dem größtmöglichen Moment die Knicklast nicht erreicht. Da die kritische Belastung eines konservativen Systems beim Hinzufügen von Bindungen, die keine Arbeit leisten, auf keinen Fall abnimmt [1], gilt dieses Resultat auch in den Knickfällen I, II, IV, während bei der Lagerung V der Fall (a) kaum in Frage kommt. Hingegen darf im Fall (b) nach (3.11b) die Knickgefahr nur bei nichtschlanken Querschnitten mit zwei annähernd gleichen Biegesteifigkeiten unberücksichtigt bleiben. Zwar läßt sich auch ein Stab von schlankem Querschnitt $(\alpha > \gamma > \beta)$ mit $\omega_0 = 0$ nicht knicken, wenn die das pseudotangentiale Moment erzeugenden Kräfte (Abb. 5c) in der ursprünglichen Längsrichtung des Querschnittes zeigen $(\delta = 0)$. Für $\delta = \pi/2$ jedoch, mit

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)}{\alpha\,\beta}}\,|\omega^*| \qquad \text{und} \qquad q_i = \sqrt{\frac{\alpha\,(\gamma-\beta)}{\beta\,(\alpha-\gamma)}},$$

lautet die Knickgleichung (3.11b)

$$\mathfrak{Cof}\,\lambda_i\,l\,\cos\frac{\omega^*\,l}{2} - q_i\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_i\,l\,\sin\frac{\omega^*\,l}{2} = 0$$

und weist eine Lösung $|\omega^*|\,l < \pi$ auf.

β) Nichtschlanke Querschnitte. Die von *R. Grammel* bei des Lagerung V für zwei axiale Momente und für nichtschlanke Querschnitte $(\alpha > \beta > \gamma)$ berechnete Kurvenschar [2] läßt sich, wie Tabelle 1 zeigt, teilweise auch bei unseren Knickgleichungen verwenden.

Tabelle 1.

Knickfall	I	II	III, s	III, q	IV, s	V, s—s	V, αx—α x (*Grammel*)
$\alpha = \beta = 4\gamma$ $\quad w_{\gamma_1}$	35,97	25,13	12,57	6,285	27,25	19,65	25,13
$\alpha = 2\beta = 4\gamma$ $\quad w_{\gamma_2}$	22,76	16,02	7,59	3,80	17,20	12,35	16,2
$\frac{w_{\gamma_1}}{w_{\gamma_2}}$	1,58	1,57	1,66	1,65	1,59	1,59	1,55

In der ersten Zeile sind die Knickmomente für zwei gleiche Biegesteifigkeiten eingetragen, die aus der Tabelle 2 (Abschnitt 4) auf die dimensionslose Größe $w_\gamma = W\,l/\gamma$ umgerechnet wurden. Die Knickmomente der zweiten Zeile wurden aus den Knickgleichungen dieses Abschnitts ermittelt und beziehen sich auf einen Stab, dessen beide Biegesteifigkeiten noch wesentlich größer sind als γ. Da das Verhältnis der beiden kritischen Momente in allen untersuchten Fällen ungefähr denselben Wert aufweist, läßt sich bei solchen Stäben die gefährliche Last mit *Grammels* Kurven oder mit der einfachsten unserer Knickformeln gut approximieren.

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 114.

[2] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 268 oder *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 605, 2. Aufl.

γ) Verwundene Stäbe. Abb. 6 demonstriert den Einfluß der spannungsfreien Verwindung ω_0 auf das Knickmoment [1]. Dieser äußert sich besonders deutlich bei einem sehr schlanken Querschnitt $\alpha \geqslant \gamma > \beta$, für den die Knickgleichung im Fall III bei einem semitangentialen Moment [vgl. (3.8)]

$$2 + 2\cos\sqrt{\varrho\,\sigma}\cos\varrho + \frac{\varrho+\sigma}{\sqrt{\varrho\,\sigma}}\sin\sqrt{\varrho\,\sigma}\sin\varrho = 0$$

lautet. Dabei bedeuten

$$w_\gamma = \frac{Wl}{\gamma}, \quad \varrho = \omega_0 l + w_\gamma,$$
$$\sigma = \omega_0 l + \frac{\beta-\gamma}{\beta} w_\gamma.$$

In Abb. 6a finden sich die zur Bestimmung der Knicklast maßgebenden Kurvenäste dieser Funktion wiedergegeben. Um daraus die eigentlichen Knickkurven zu berechnen, hat man sich auf eine spezielle Querschnittsform und ein spezielles Material festzulegen: für einen Eisenstab (Querzahl $m = 10/3$) mit sehr schmalem Rechteckquerschnitt [2] $\left(\beta = \frac{13}{20}\gamma\right)$ gelten die Kurven von Abb. 6b, welche, wie die Kurven in Abb. 6a, symmetrisch sind bezüglich des Koordinatenursprungs; das Vorzeichen von ω_0 bezieht sich auf den Drehsinn des belastenden Moments. Die Knick-

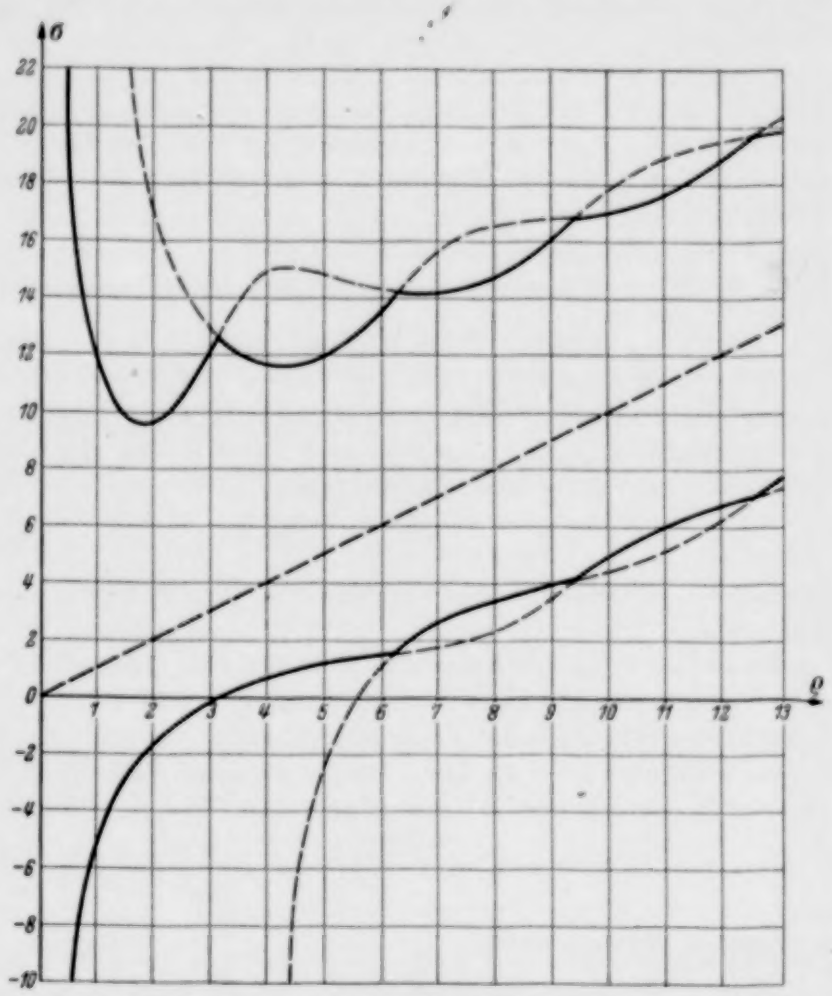


Abb. 6a. Hilfskurven zur Berechnung des Knickmoments des verwundenen Stabes mit sehr schlankem Querschnitt.

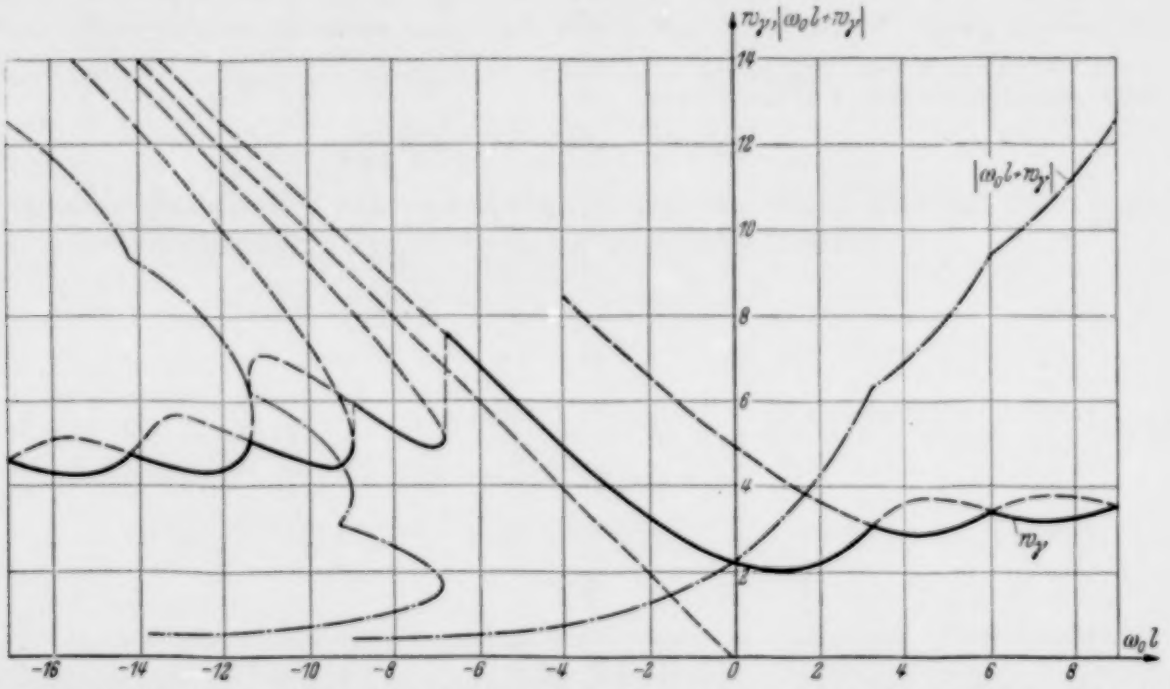


Abb. 6b. Das kritische Moment für einen verwundenen Eisenstab mit sehr schmalem Rechteckquerschnitt.

[1] Wir setzen hier voraus, daß die Torsionssteifigkeit von ω_0 unabhängig sei. Diese Annahme ist nur für kleine Werte von ω_0 bewiesen: *P. M. Riz*, C. R. de l'Académie de l'URSS 23 (1939), S. 17 u. 141 und *A. Lourie*, *G. Janelidze*, C. R. de l'Académie de l'URSS 24 (1939), S. 24 u. 227.

[2] Vgl. z. B. *Timoshenko* u. *Goodier*, Theory of Elasticity, S. 277, New York 1951.

kurve in Abb.6b weist bei $\omega_0 l = -6{,}8$ einen Sprung auf, mit dem sie über die Asymptote $\omega_0 l + w_\gamma = 0$ hinüberwechselt. Mit einer ähnlichen, jedoch kleineren Unstetigkeit wird $\omega_0 l + w_\gamma = -\pi$ übersprungen. Allgemein besitzt die zur Erzeugung einer ausgebogenen elastischen Linie erforderliche Belastung Maxima bei $\omega_0 l + w_\gamma = n\pi$, $n = 0, -1, \pm 2, \ldots$ (Ausnahme: $n = +1$). Die Kurve, die in Abb. 6b die Verwindung vor dem Knicken wiedergibt, weist bei diesen Funktionswerten Spitzen auf. Sie korrespondieren mit den Schnittpunkten der je paarweise gegeneinander oszillierenden möglichen Knickkurven, von denen jeweilen die der Abszissenachse nächstgelegene das Knickmoment bestimmt. Die Ordinate der Knoten nähert sich asymptotisch dem Wert $w_\gamma = 2\pi\beta/\gamma = 4{,}08$. Die kleinste Knicklast erhält man nicht wie beim gedrückten Stab[1] für $\omega_0 = 0$, sondern für $\omega_0 l = 0{,}9$. Daß die spannungsfreie Verwindung und die Torsion gleichartige Größen sind, bewirkt für das kritische Moment eine ausgeprägtere Abhängigkeit von ω_0 als für die knickende Druckkraft.

4. Knickung gerader Stäbe mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten durch Druck und Torsion. a) Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen. Die Ausgangsgleichungen (2.10) lassen sich, sobald die beiden Biegesteifigkeiten einander gleichgesetzt werden ($\alpha = \beta$), mit $\mathsf{K} = K_y + i\,K_x$ zu einer einzigen Differentialgleichung für die Variable $\mathsf{F} = f + i\,g$ zusammenzufassen:

$$\alpha\,\mathsf{F}'' - i\,(2\,\alpha\,\omega - W)\,\mathsf{F}' + (W\omega - \alpha\,\omega^2 + P)\,\mathsf{F} = \mathsf{K}\,e^{i\,\omega\,t}. \tag{4.1}$$

Wir führen gleichzeitig die komplexen Größen $\mathsf{M} = M_x - i\,M_y$, $\mathsf{W} = W_x - i\,W_y$, $\mathsf{z} = x + i\,y$ ein.

Da in jedem Querschnitt alle Geraden durch den Schwerpunkt Hauptachsen sind, brauchen wir eine spannungsfreie Verwindung nicht mehr zu berücksichtigen. Bei geeigneter Wahl der x-Richtung verschwindet die Integrationskonstante δ in (2.5).

Im Falle von zwei gleichen Biegesteifigkeiten können wir ferner zu dimensionslosen Größen übergehen. Statt mit W und P rechnen wir mit

$$w = \frac{W l}{2\alpha}, \qquad p = \frac{P l^2}{\alpha}$$

und bilden entsprechend

$$w_x = \frac{W_x l}{2\alpha}, \quad w_y = \frac{W_y l}{2\alpha}, \quad \mathsf{m} = \frac{\mathsf{M} l}{2\alpha}, \quad \mathsf{k} = \frac{\mathsf{K} l^2}{\alpha}.$$

Im folgenden sind x, y, z, z, t mit einem dem Stab die Länge 1 zuordnenden Maßstab gemessen, ω bedeutet nun die ganze Verwindung, und Ableitungen sind nach der dimensionslosen Bogenlänge t auszuführen.

Die Differentialgleichung (4.1) wird damit auf

$$\mathsf{F}'' - i\,2\,(\omega - w)\,\mathsf{F}' + (2\,w\,\omega - \omega^2 + p)\,\mathsf{F} = \mathsf{k}\,e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2}$$

transformiert. Wir fügen zur Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\mathsf{F}_h = \mathsf{A}\,e^{i\,\lambda_1 t} + \mathsf{B}\,e^{i\,\lambda_2 t} \quad (\mathsf{A} = A_r + i\,A_i, \quad \mathsf{B} = B_r + i\,B_i)$$

mit den Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \omega - w \pm \sqrt{w^2 + p} \tag{4.3}$$

der charakteristischen Gleichung das partikuläre Integral

$$\mathsf{F}_p = \mathsf{C}\,e^{i\,\omega\,t} = \frac{\mathsf{k}}{p}\,e^{i\,\omega\,t}$$

hinzu und erfassen mit

$$\mathsf{F} = \mathsf{A}\,e^{i\,\lambda_1 t} + \mathsf{B}\,e^{i\,\lambda_2 t} + \mathsf{C}\,e^{i\,\omega\,t} \tag{4.4}$$

alle Lösungen von (4.2).

b) Die Knickfälle III und II. Die kinematischen Randbedingungen können aus Abschnitt 3 direkt übernommen werden. Bei den Lagerungen III und II tritt keine Lagerkraft k auf: $\mathsf{k} = \mathsf{C} = 0$. Das eingespannte Stabende A [in beiden Fällen der Ursprung des (x, y, z)-

[1] *H. Ziegler*, Schweiz. Bauztg. 66 (1948), S. 463 und *E. Hui*, Knickung verwundener Stäbe, Diss. ETH, in Vorbereitung.

Systems] stellt die Forderung $\mathsf{F}(0) = 0$, die (4.4) auf

$$\mathsf{F}(t) = \mathsf{A}\left(e^{i\lambda_1 t} - e^{i\lambda_2 t}\right) \tag{4.5}$$

vereinfacht. Beim Knickfall III greife in B ein allgemeines konservatives Moment [vgl. (2.15)] an.

α) Fall III, $w_x = A^* w x'$, $w_y = (1 - A^*) w y'$. Die mit Hilfe von (2.1a) und für $t = b = 1$ formulierten Gleichgewichtsbedingungen (2.9)

$$\left.\begin{aligned} f'(1) + (\omega - 2w)\, g(1) &= 2 w_x \cos\omega + 2 w_y \sin\omega\,, \\ g'(1) - (\omega - 2w)\, f(1) &= 2 w_x \sin\omega - 2 w_y \cos\omega \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

lassen sich bei einem allgemeinen Moment nicht komplex zusammenziehen, weshalb wir F zerlegen müssen:

$$f = -2 \sin\sqrt{w^2 + p}\, t\, [A_r \sin(\omega - w)\, t + A_i \cos(\omega - w)\, t]\,,$$

$$g = 2 \sin\sqrt{w^2 + p}\, t\, [A_r \cos(\omega - w)\, t - A_i \sin(\omega - w)\, t]\,.$$

Indem wir diese Ausdrücke differentiieren, gewinnen wir die Beziehungen

$$f' = \sqrt{w^2 + p}\, \operatorname{ctg} \sqrt{w^2 + p}\, t\, f - (\omega - w)\, g\,,$$

$$g' = (\omega - w)\, f + \sqrt{w^2 + p}\, \operatorname{ctg} \sqrt{w^2 + p}\, t\, g\,.$$

Wir setzen sie in (4.6) ein, ebenso w_x, w_y mit Hilfe von (2.7) und erhalten

$$f(1)\left[\sqrt{w^2 + p}\, \operatorname{ctg} \sqrt{w^2 + p} + 2w(1 - 2A^*) \sin\omega \cos\omega\right] + g(1)\, w (1 - 2A^*)(\sin^2\omega - \cos^2\omega) = 0\,,$$

$$f(1)\, w (1 - 2A^*)(\sin^2 w - \cos^2\omega) + g(1)\left[\sqrt{w^2 + p}\, \operatorname{ctg} \sqrt{w^2 + p} - 2w(1 - 2A^*) \sin\omega \cos\omega\right] = 0\,.$$

Die Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen,

$$\left[\sqrt{w^2 + p} \cos\sqrt{w^2 + p} - w(1 - 2A^*) \sin\sqrt{w^2 + p}\right]\left[\sqrt{w^2 + p} \cos\sqrt{w^2 + p} + w(1 - 2A^*) \sin\sqrt{w^2 + p}\right] = 0 \tag{4.7a}$$

liefert zwei mögliche Knickgleichungen. Wir werden im Abschnitt 4 f zeigen, daß die kleinere Knicklast für $A^* > 1/2$ dem zweiten, für $A^* \leqq 1/2$ dem ersten Faktor entspringt; d. h. es gilt

$$\sqrt{w^2 + p} \cos\sqrt{w^2 + p} - w\,|1 - 2A^*|\, \sin\sqrt{w^2 + p} = 0\,. \tag{4.7}$$

[III, $w_x = A^* w x'$, $w_y = (1 - A^*) w y'$]

In (4.7) ist mit $A^* = 1/2$ die Knickgleichung für ein semitangentiales Moment

$$\cos\sqrt{w^2 + p} = 0\,, \quad \frac{\pi^2}{4} = w^2 + p \tag{4.8}$$

(III, semitangentiales Moment),

mit $A^* = 1$ die Knickbedingung für ein quasitangentiales Moment

$$\sqrt{w^2 + p} \cos\sqrt{w^2 + p} - w \sin\sqrt{w^2 + p} = 0 \tag{4.9}$$

(III, quasitangentiales Moment)

je als Spezialfall enthalten.

β) Fall III, $w_x = w(x' + B^* y')$, $w_y = 0$. Mit den gleichen Überlegungen wie im Unterabschnitt α) können wir hier die Knickgleichung

$$\frac{p}{2} + \left(w^2 + \frac{p}{2}\right) \cos 2\sqrt{w^2 + p} + B^* w \sqrt{w^2 + p} \sin 2\sqrt{w^2 + p} = 0 \tag{4.10}$$

[III, $w_x = w(x' + B^* y')$, $w_y = 0$]

ableiten. Setzen wir zunächst $B^* = 0$ (quasitangentiales Moment), so erhalten wir eine mit (4.9) äquivalente Gleichung, während mit $B^* = \operatorname{tg}\tau$ aus (4.10) die Bestimmungsgleichung

$$\frac{p}{2} + \left(w^2 + \frac{p}{2}\right) \cos 2\sqrt{w^2 + p} + \operatorname{tg}\tau \cdot w \sqrt{w^2 + p} \sin 2\sqrt{w^2 + p} = 0 \tag{4.11}$$

(III, pseudotangentiales Moment)

für die Knickdyname bei einem pseudotangentialen Moment hervorgeht.

Beim in A starr eingespannten Stab ist $\tau = 2\frac{\alpha}{\gamma} w$ (a); gestattet hingegen das Lager A eine Drehung des Stabes, so setze man $\tau = \frac{\alpha}{\gamma} w$ (b). Ferner beachte man die Schranken $w_{max} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$ im Fall (a) und $w_{max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$ im Fall (b).

γ) Fall II. Mit der Bedingung $\mathsf{F}(1) = \mathsf{A}\left(e^{i\lambda_1} - e^{i\lambda_2}\right)$ sorgen wir dafür, daß auch im Lager B die Stabtangente parallel zur z-Achse bleibt. Sie führt auf

$$\pm (\lambda_1 - \lambda_2) = \pm 2\sqrt{w^2 + p} = 2\pi\,, \quad \pi^2 = w^2 + p \qquad (4.12)$$

(II).

c) Der Knickfall I. Wir legen für die Lagerungen I und V den Ursprung des (x, y, z)-Systems in die Stabmitte, damit sich die Zwischenrechnungen durch die Symmetrie der Randbedingungen vereinfachen. In allen drei Fällen darf sich A gegenüber B nicht verschieben, d. h. die elastische Linie muß die Bedingung

$$\int_a^b d\bar{z} = \int_{-1/2}^{+1/2} (x' - i\,y')\,dt = 0$$

erfüllen, die wir mit Hilfe von (2.7) sofort integrieren können:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1/2}^{+1/2} d\bar{z} = \int_{-1/2}^{+1/2} i\,\mathsf{F}\,e^{-i\omega t}dt = \mathsf{A}\,\frac{\exp\left[\frac{i(\lambda_1-\omega)}{2}\right] - \exp\left[\frac{-i(\lambda_1-\omega)}{2}\right]}{\lambda_1 - \omega} \\ + \mathsf{B}\,\frac{\exp\left[\frac{i(\lambda_2-\omega)}{2}\right] - \exp\left[\frac{-i(\lambda_2-\omega)}{2}\right]}{\lambda_2 - \omega} + \mathsf{C}\,i = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Zwei weitere Bestimmungsgleichungen für A, B und C gewinnen wir aus den Forderungen $\mathsf{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\mathsf{F}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, welche den knickenden Stab den Einspannungen A und B anpassen. Aus der Lösbarkeitsbedingung dieses Gleichungssystems geht die Knickgleichung

$$p \sin\sqrt{w^2 + p} + 2\sqrt{w^2 + p}\left(\cos\sqrt{w^2 + p} - \cos w\right) = 0 \qquad (4.14)$$

(I)

hervor, die mit der von *A. Trösch* [1] für die Lagerung I abgeleiteten Knickbedingung gleichwertig ist.

d) Der Knickfall IV. Im Knickfall IV erweist es sich als günstig, die Bogenlänge t der elastischen Linie vom Stabende A aus zu messen. An die Stelle von (4.13) tritt dann die weiter unten formulierte Beziehung (4.17b), während die Einspannbedingung auf (4.17a) führt. Die für das Stabende B aus (2.9) abzuleitende dynamische Randbedingung wird, im Gegensatz zu den beiden ersten, von der Art des belastenden Moments abhängig sein.

α) Semitangentiales Moment. Wir fassen (2.9) komplex zusammen:

$$\mathsf{F}'(t) - i\,(\omega - 2w)\,\mathsf{F}(t) = 2\,\mathsf{m}\,e^{i\omega t}\,, \qquad (4.15)$$

haben im Stabende B speziell $t = 1$ und

$$\mathsf{m}(1) = \mathsf{w} = \frac{w}{2}\left(x'(1) - i\,y'(1)\right) = i\,\frac{w}{2}\,\mathsf{F}(1)\,e^{-i\omega}$$

zu setzen, und erhalten

$$\mathsf{F}'(1) - i\,(\omega - w)\,\mathsf{F}(1) = 0\,, \qquad (4.16)$$

woraus durch Substitution von (4.4) die Beziehung (4.17c) gefunden wird. Die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A} \qquad\qquad + \mathsf{B} \qquad\qquad + \mathsf{C} \qquad &= 0\,, \\ \mathsf{A}\,\frac{\exp i(\lambda_1 - \omega) - 1}{\lambda_1 - \omega} + \mathsf{B}\,\frac{\exp i(\lambda_2 - \omega) - 1}{\lambda_2 - \omega} + \mathsf{C}\,i \qquad &= 0\,, \\ \mathsf{A}\sqrt{w^2 + p}\,e^{i\lambda_1} \qquad - \mathsf{B}\sqrt{w^2 + p}\,e^{i\lambda_2} \qquad + \mathsf{C}\,w\,e^{i\omega} \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.17a, b, c)$$

[1] *A. Trösch*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 265.

hat für die kritische Belastung den Wert Null:

$$p\sqrt{w^2+p}\cos\sqrt{w^2+p}-(2w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}+2w\sqrt{w^2+p}\sin w=0\,. \quad (4.18)$$

(IV, semitangentiales Moment)

β) Quasitangentiales Moment. Für $w_x = w\,x'(1)$, $w_y = 0$ kann aus (2.9) nicht mehr eine (4.16) entsprechende komplexe Randbedingung gebildet werden, sondern es entstehen die beiden reellen Forderungen

$$\left.\begin{aligned} f'(1)-2w\sin\omega\cos\omega\,f(1)+(\omega-2w\sin^2\omega)\,g(1)&=0\,,\\ g'(1)-(\omega-2w\cos^2\omega)\,f(1)+2w\sin\omega\cos\omega\,g(1)&=0\,.\end{aligned}\right\} \quad (4.19a, b)$$

Vor der Zerlegung von $F(t)$ in Real- und Imaginärteil kann C mit Hilfe von (4.17a) eliminiert werden. Indem wir nun versuchen A_r, A_i, B_r, B_i aus (4.19a, b) und der zerlegten Gleichung (4.17b) zu ermitteln, stoßen wir auf die Knickgleichung

$$\begin{vmatrix} -\Phi_1 & p & \Phi_2 & p \\ \Phi_1\sin\Phi_1 & \Phi_1\cos\Phi_1 & \Phi_2\sin\Phi_2 & -\Phi_2\cos\Phi_2 \\ -\Phi_2(1-\cos\Phi_1) & -\Phi_2\sin\Phi_1+p & \Phi_1(1-\cos\Phi_2) & -\Phi_1\sin\Phi_2+p \\ -\Phi_2\sin\Phi_1+p & \Phi_2(1-\cos\Phi_1) & -\Phi_1\sin\Phi_2+p & -\Phi_1(1-\cos\Phi_2) \end{vmatrix}=0. \quad (4.20)$$

(IV, quasitangentiales Moment)

Es bedeuten

$$\Phi_1=\sqrt{w^2+p}-w\,,\qquad \Phi_2=\sqrt{w^2+p}+w\,. \quad (4.21)$$

Die Zwischenrechnungen vereinfachen sich, wenn man (4.19a, b) durch [(4.19a) sin ω — (4.19b) cos ω] und [(4.19a) cos ω + (4.19b) sin ω] ersetzt. Ferner beachte man $(\lambda_1-\omega)(\lambda_2-\omega)=-p$ und $(\lambda_{1(2)}-\omega)+2w=-(\lambda_{2(1)}-\omega)$.

γ) Pseudotangentiales Moment. Als Randbedingungen in B erhalten wir hier aus (2.9) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} f'(1)-2w(\sin\omega-\operatorname{tg}\tau\cos\omega)\cos\omega\,f(1)+[\omega-2w(\sin\omega-\operatorname{tg}\tau\cos\omega)\sin\omega]\,g(1)&=0\,,\\ g'(1)-[\omega-2w(\cos\omega+\operatorname{tg}\tau\sin\omega)\cos\omega]\,f(1)+2w(\cos\omega+\operatorname{tg}\tau\sin\omega)\sin\omega\,g(1)&=0\,.\end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

Im übrigen ist das Vorgehen bei der Ableitung der Knickgleichung dasselbe wie beim quasitangentialen Moment und führt auf

$$\begin{vmatrix} -\Phi_1 & p \\ \Phi_1\sin\Phi_1+2w\operatorname{tg}\tau(1-\cos\Phi_1) & \Phi_1\cos\Phi_1+2w\operatorname{tg}\tau\sin\Phi_1 \\ -\Phi_2(1-\cos\Phi_1) & -\Phi_2\sin\Phi_1+p \\ -\Phi_2\sin\Phi_1+p & \Phi_2(1-\cos\Phi_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_2 & p \\ \Phi_2\sin\Phi_2+2w\operatorname{tg}\tau(1-\cos\Phi_2) & -\Phi_2\cos\Phi_2-2w\operatorname{tg}\tau\sin\Phi_2 \\ \Phi_1(1-\cos\Phi_2) & -\Phi_1\sin\Phi_2+p \\ -\Phi_1\sin\Phi_2+p & -\Phi_1(1-\cos\Phi_2) \end{vmatrix}=0. \quad (4.23)$$

(IV, pseudotangentiales Moment)

e) Der Knickfall V. Bei der beidseitig durch Gelenke oder kurze Lager gehaltenen Welle kann die Tangente sowohl im Stabende B als auch in A beim Ausknicken die Richtung ändern; wir müssen deshalb für beide Enden wissen, wie das belastende Moment eingeführt wird. Aus der großen Zahl der zu unterscheidenden Fälle greifen wir diejenigen heraus, bei denen die beiden Momente gleichartig sind; auch verlangen wir, daß, wenn quasi- oder pseudotangentiale Kräftepaare wirken, die erzeugenden Kräfte in A und B gleichgerichtet seien (Abb. 5b, c).

Die Randbedingungen in B sind die gleichen wie im Fall IV [vgl. (4.16) beim semitangentialen, (4.19) beim quasitangentialen und (4.22) beim pseudotangentialen Moment], doch ist diesem Stabende jetzt die Bogenlänge $t = 1/2$ zugeordnet. Durchwegs $t = 1$ durch $t = 1/2$ ersetzend können wir ihre dortige Formulierung übernehmen, und mit $t = -1/2$ entstehen aus jenen Beziehungen auch die Gleichungen der Randbedingungen in A, da diese ja mit denen in B übereinstimmen. Ferner ist (4.13) zu berücksichtigen.

Aus diesen Randbedingungen geht für semitangentiale Momente in A und B die Knickgleichung

$$2\,w^2\left(\cos\sqrt{w^2+p}-\cos w\right)+p\sqrt{w^2+p}\,\sin\sqrt{w^2+p}=0 \tag{4.24}$$

(V, zwei semitangentiale Momente)

hervor. Im Falle von zwei quasitangentialen Momenten läßt sich die Knickdeterminante in ein Produkt aufspalten. In der Bedingung

$$(2\,w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}-2\,w\sqrt{w^2+p}\,\sin w=0 \tag{4.25}$$

(V, zwei quasitangentiale Momente)

stecken die kleineren Knicklasten, so daß die zweite Forderung

$$p\,(2\,w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}+2\,p\,w\sqrt{w^2+p}\,\sin w+8\,w^2\sqrt{w^2+p}\,\left(\cos\sqrt{w^2+p}-\cos w\right)=0$$

nicht berücksichtigt werden muß. Wirken in beiden Stabenden pseudotangentiale Momente, so erhalten wir die maßgebende Knickgleichung

$$\begin{aligned}&p\,(2\,w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}+2\,p\,w\sqrt{w^2+p}\,\sin w+8\,w^2\sqrt{w^2+p}\,\left(\cos\sqrt{w^2+p}-\cos w\right)\\&+4\,w\,\operatorname{tg}\frac{w}{2}\left[(2\,w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}-2\,w\sqrt{w^2+p}\,\sin w-\frac{p}{2}\sqrt{w^2+p}\,\left(\cos\sqrt{w^2+p}+\cos w\right)\right]=0\end{aligned} \tag{4.26}$$

(V, zwei pseudotangentiale Momente),

während

$$2\,w\sqrt{w^2+p}\,\sin w-(2\,w^2+p)\sin\sqrt{w^2+p}+2\,w\sqrt{w^2+p}\,\operatorname{tg}\frac{w}{2}\left(\cos\sqrt{w^2+p}-\cos w\right)=0$$

außer Betracht fällt.

Führen wir die entsprechende Rechnung mit zwei axial bleibenden Momentvektoren durch, so findet die von *R. Grammel*[1] abgeleitete Knickformel

$$w^2+p=\pi^2$$

ihre Bestätigung. Es zeigt sich ferner, daß diese Bedingung auch gilt, wenn die Momente in A und B stets die Richtung der Stabtangente aufweisen. Diese beiden nichtkonservativen Knickfälle müßten eigentlich mit dem kinetischen Stabilitätskriterium untersucht werden. Die Schwingungsrechnung wurde für den nur durch axiale Torsionsmomente belasteten Stab von *A. Trösch*[2] durchgeführt und bestätigte die statisch berechnete Knicklast. Es ist infolgedessen zu vermuten, daß auch beim zusätzlich auf Druck beanspruchten Stab und bei tangentialen Torsionsmomenten die statisch ermittelte Knickbelastung mit der kinetischen übereinstimmt.

f) Diskussion der Knickformeln. In den meisten Knickfällen wird die kritische Dyname durch eine transzendente Beziehung zwischen w und p festgelegt. Nur bei den Lagerungen II und III (semitangentiales Moment), bei denen die Knickkurven Parabeln sind, läßt sich zu jedem w sofort das zugehörige p angeben. Um die Ermittlung der Knicklast auch in den übrigen Fällen zu erleichtern, wird zu jeder Knickgleichung die zugehörige Kurve im (w, p)-Diagramm wiedergegeben (Abb. 7 und 8) und die Knickfunktion $\Omega\,(w, p)=0$ durch ein einfaches Polynom möglichst gut angenähert (Tabelle 3)[3].

Bei der Belastung durch ein pseudotangentiales Moment tritt die Torsionssteifigkeit γ

$$\gamma=\frac{G\,J_p}{k^*}=\frac{m\,E\,J_p}{k^*\,2\,(m+1)}$$

in den Knickformeln auf. Es bezeichnen: E den Elastizitätsmodul, G den Schubmodul, m die Querzahl, J_a und $J_p=2\,J_a$ das axiale und das polare Trägheitsmoment, während k^* ein von der Querschnittsform abhängiger Zahlenfaktor ist. Die kritische Belastung wird damit von der

[1] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 206 und *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1 S. 608, 2. Aufl.

[2] *A. Trösch*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 258.

[3] Für die Tabellierung der verhältnismäßig komplizierten Knickbedingungen der Lagerung IV stand mir die programmgesteuerte Rechenmaschine des Instituts für angewandte Mathematik der ETH zur Verfügung, wofür ich dem Schweizerischen Schulrat und Herrn Prof. Dr. *E. Stiefel* zu Dank verpflichtet bin.

Form des Querschnitts und vom Material abhängig. Wir berücksichtigen hier nur Kreisquerschnitte ($k^* = 1$) und Stäbe aus Flußstahl ($m = 10/3$):

$$\gamma = \frac{m E J_a}{m+1} = \frac{10}{13}\alpha\,, \quad \omega l = \frac{W l}{\gamma} = 2{,}6\, w\,.$$

Beim pseudotangentialen Moment gelten dann die numerischen Schranken $w \leq 0{,}605$ (a) und $w \leq 1{,}21$ (b).

In Tabelle 2 sind zunächst die kritischen Lasten für $w = 0$ und $p = 0$ zusammengestellt. Als Schnittpunkte der Knickkurven mit der p-Achse erhalten wir die *Euler*schen Knickkräfte, während die Knickmomente w_0 die von *H. Ziegler*[1] gefundenen Werte bestätigen. Der Torsionswinkel $2{,}6\, w_0$ gibt einen Anhaltspunkt für die Größenordnung der Knickmomente; es zeigt sich, daß dem Knicken durch Torsion allein im ungünstigsten Fall III, q eine Verdrehung der Welle um 117° vorausgeht. Tabelle 2 enthält ferner in einigen Fällen die Reihenentwicklung der Knickfunktion für kleine Werte von w: sie zeigt, daß nicht alle Knickkurven unter einem rechten Winkel gegen die p-Achse laufen; bei symmetrischer Lagerung ist die Änderung der knickenden

Tabelle 2.

Knickfall	Gleichung	$P(w=0)=p_0$	p_0 bestimmt durch	$w(p=0)=w_0$	w_0 bestimmt durch	Entwicklung für $\lvert w\rvert \ll 1$
I	(4.14)	39,478	$\sin\frac{\sqrt{p_0}}{2}=0$	4,494	$\operatorname{tg} w_0 = w_0$	$p_0 = p = 3\,w^2$
II	(4.12)	9,8696	—	3,142	—	—
III, s	(4.8)	2,4674	—	1,571	—	—
III, q	(4.9)	2,4674	$\cos\sqrt{p_0}=0$	0,7854	$\cos 2w_0 = 0$	$p_0 - p = 2\lvert w\rvert$
III, p	(4.11)	2,4674	$\cos\sqrt{p_0}=0$	—	—	$p_0 - p = 2\lvert w\rvert$
IV, s	(4.18)	20,192	$\operatorname{tg}\sqrt{p_0}=\sqrt{p_0}$	3,406	$\operatorname{ctg} w_0 = \frac{1}{w_0} - w_0$	$p_0 - p = 2{,}11 w^2$
IV, q	(4.20)	20,192	$\operatorname{tg}\sqrt{p_0}=\sqrt{p_0}$	2,475	—	—
IV, p	(4.23)	20,192	$\operatorname{tg}\sqrt{p_0}=\sqrt{p_0}$	—	—	—
V, $s-s$	(4.24)	9,8696	$\sin\sqrt{p_0}=0$	2,456	$\operatorname{tg} w_0 + \frac{w_0}{3} = 0$	$p_0 - p = 1{,}81\, w^2$
V, $q-q$	(4.25)	9,8696	$\sin\sqrt{p_0}=0$	1,571	—	$p_0 - p = 5\, w^2$
V, $p-p$	(4.26)	9,8696	$\sin\sqrt{p_0}=0$	—	—	$p_0 - p = 0{,}2\, w^2$

Druckkraft durch kleine Torsionsmomente von zweiter Ordnung klein, quasi- und pseudotangentiale Momente jedoch machen sich bei unsymmetrischer Lagerung schon in erster Näherung bemerkbar.

Die in Tabelle 3 wiedergegebene genäherte Darstellung der Knickgleichungen besteht aus einem zweigliedrigen Ansatz, dessen Koeffizienten mit Hilfe der angegebenen kritischen Dynamen ermittelt werden (d. h. die exakte Knickkurve schneidet die Näherung in den Bestimmungspunkten). Da man für praktische Anwendungen keinen Wert auf die genaue Kenntnis der Bestimmungspunkte legen wird, darf die letzte Stelle der Koeffizienten weggerundet werden. Mit der zweiten, meist dreigliedrigen Näherungsgleichung erfassen wir auch den auf Zug und Torsion beanspruchten Stab. Die letzte Kolonne mißt die Güte der Approximation, indem sie den auf $\frac{p_0}{2}$ bezogenen maximalen Fehler angibt, der bei einer Berechnung von p aus w mit der Näherungsgleichung im Gebiet zwischen den Bestimmungspunkten entsteht.

Die Knickkurven von Abb. 7 bestätigen den Satz, daß eine Vermehrung der Bindungen eine Erhöhung der kritischen Belastung bewirkt: entsprechende Kurven der Lagerungen III, II, I und III, IV, I schneiden sich nicht; verschiedenartige Bindungen hingegen lassen sich nicht vergleichen, wie die Schnittpunkte der Kurven III, s und V, $s-s$, IV und II usw. zeigen.

Für die kritischen Dynamen eines Stabes mit zwei annähernd gleichen Biegesteifigkeiten kann man aus den Kurven von Abb. 7 eine gute Näherung gewinnen. In einem Koordinatensystem (w_γ, p_β) mit

$$w_\gamma = \frac{W l}{\gamma} = 2\,\frac{\alpha}{\gamma}\,w\,, \qquad p_\beta = \frac{P l^2}{\beta} \qquad (\beta \leqq \alpha)$$

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 112.

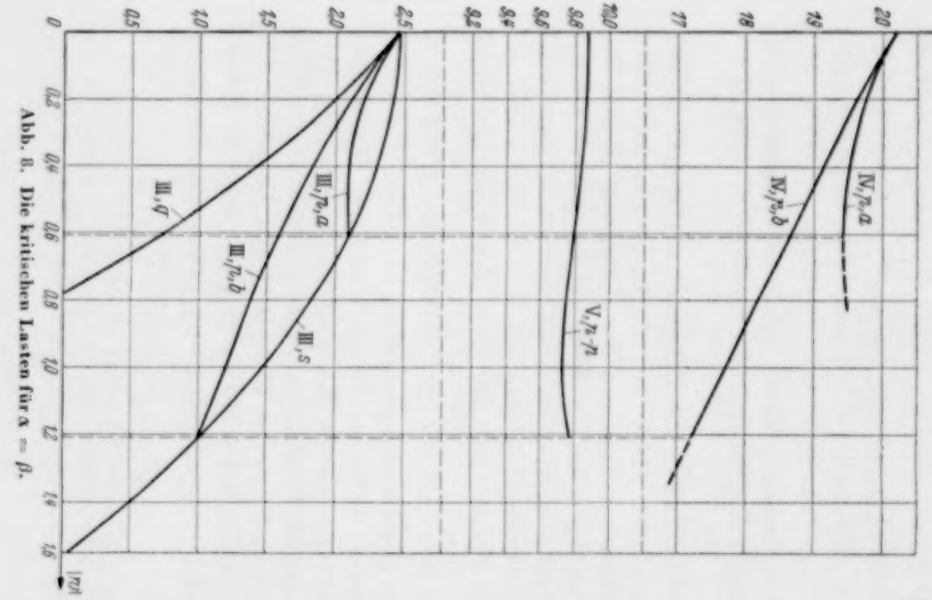


Abb. 6. Die kritischen Lasten für $\alpha = \beta$.

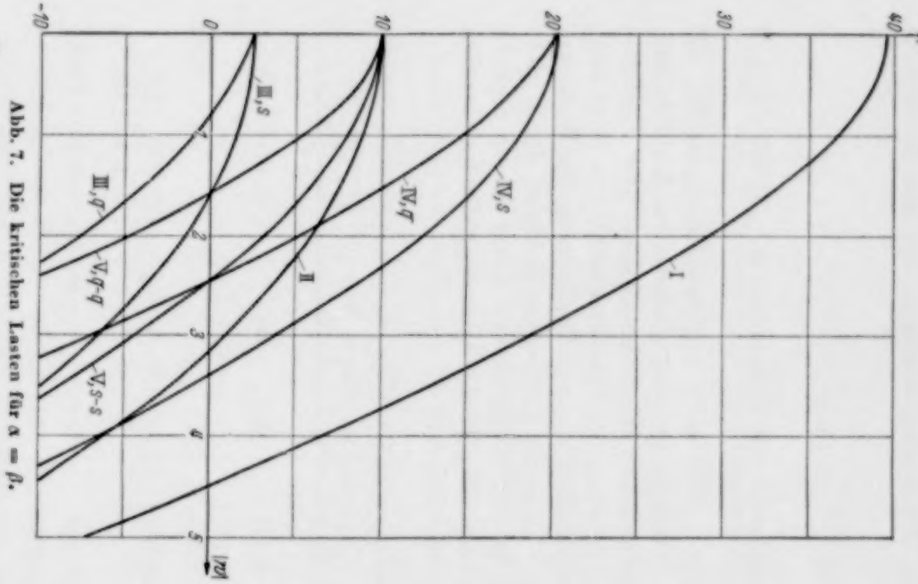


Abb. 7. Die kritischen Lasten für $\alpha = \beta$.

Tabelle 3.

Knickfall	Gleichung	Näherungsgleichung	Bestimmungspunkte 1. w	1. p	2. w	2. p	3. w	3. p	4. w	4. p	Fehler %
I	(4.14)	$39{,}478 - p = 2{,}609\, w^2 - 0{,}0324\, w^4$	0	39,478	2,885	20,00	4,494	0,00	—	—	2,5
		$39{,}478 - p = 2{,}812\, w^2 - 0{,}0641\, w^4 + 0{,}00105\, w^6$	0	39,478	2,420	25,00	3,725	10,00	4,859	— 5,00	1
II	(4.12)	$9{,}870 - p = w^2$ (genau)	—	—	—	—	—	—	—	—	0
III, s	(4.8)	$2{,}467 - p = w^2$ (genau)	—	—	—	—	—	—	—	—	0
III, q	(4.9)	$2{,}467 - p = 1{,}970\, \lvert w\rvert + 1{,}471\, w^2$	0	2,467	0,380	1,50	0,785	0,00	—	—	3
		$2{,}467 - p = 1{,}880\, \lvert w\rvert + 1{,}60\, w^2$	0	2,467	0,785	0,00	2,263	—10,00	—	—	4
III, p (a)	(4.11)	$2{,}078 - p = -1{,}34\,(\lvert w\rvert - 0{,}475)^2 - 1{,}69\,(\lvert w\rvert - 0{,}475)^4$	0	2,467	0,475	2,078	0,605	2,102	—	—	0,1
(b)		$2{,}467 - p = 1{,}78\, \lvert w\rvert - 0{,}474\, w^2$	0	2,467	0,500	1,697	1,211	1,001	—	—	3
IV, s	(4.18)	$20{,}192 - p = 2{,}033\, w^2 - 0{,}0248\, w^4$	0	20,192	2,318	10,00	3,406	0,00	—	—	2
		$20{,}192 - p = 2{,}100\, w^2 - 0{,}044\, w^4 + 0{,}0010\, w^6$	0	20,192	1,771	14,00	2,901	5,00	4,147	— 8,00	1
IV, q	(4.20)	$20{,}192 - p = 3{,}807\, \lvert w\rvert + 1{,}76\, w^2$	0	20,192	1,537	10,19	2,476	0,00	—	—	2
		$20{,}192 - p = 3{,}126\, \lvert w\rvert + 2{,}455\, w^2 - 0{,}166\, \lvert w\rvert^3$	0	20,192	1,537	10,19	2,454	0,192	3,222	— 9,808	1
IV, p (a)	(4.23)	$19{,}43 - p = -2{,}10\,(0{,}60 - \lvert w\rvert)^2$	0,60	19,43	graphisch		—	—	—	—	0,5
(b)		$20{,}190 - p = 2{,}475\, \lvert w\rvert$	0,20	19,62	1,000	17,715	—	—	—	—	0,5
V, s—s	(4.24)	$9{,}870 - p = 1{,}793\, w^2 - 0{,}0254\, w^4$	0	9,870	1,683	5,00	2,456	0,00	—	—	1
		$9{,}870 - p = 1{,}804\, w^2 - 0{,}0318\, w^4 + 0{,}00070\, w^6$	0	9,870	1,683	5,00	2,718	— 2,00	3,632	—10,00	0,5
V, q—q	(4.25)	$9{,}870 - p = 4{,}79\, w^2 - 0{,}320\, w^4$	0	9,870	1,048	5,00	1,571	0,00	—	—	2
		$9{,}870 - p = 4{,}852\, w^2 - 0{,}406\, w^4 + 0{,}0267\, w^6$	0	9,870	1,048	5,00	1,755	— 2,00	2,422	—10,00	2
V, p—p	(4.26)	$9{,}870 - p = 0{,}12\, \lvert w\rvert$	0	9,870	graphisch		—	—	—	—	1

sind von der gesuchten Kurve zwei Punkte bekannt: die kritische Druckkraft p_{β_0} und das mit Hilfe von Abschnitt 3 zu berechnende Moment für $p = 0$. Man zeichnet nun die Knickkurve für $\alpha = \beta$, die ebenfalls durch p_{β_0} geht, ein und erhält daraus die Näherungskurve durch eine affine Transformation.

Wie aus Abb. 8 hervorgeht, ist Knicken durch pseudotangentiale Momente erst möglich bei einer Druckkraft $p \geq p_{min}$ (gilt auch für I, p und II, p), wobei in allen Fällen außer III, p (b) die minimale Knickkraft größer ist als $\frac{3}{4} p_0$. Die Knickfälle III, p (a) und V, $p-p$ bilden merkwürdig scheinende Ausnahmen von der Regel, daß ein größeres zulässiges Torsionsmoment nur auf Kosten einer kleineren kritischen Druckkraft gewonnen werden kann. Das Wiederansteigen dieser Knickkurven mit zunehmendem $|w|$ muß damit erklärt werden, daß, wie sich im Verlauf der folgenden Diskussion des Knickfalls III zeigen wird, der Charakter des belastenden Moments sich bei der Verdrehung wandelt.

K n i c k f a l l III, $w_x = A^* w x'$, $w_y = (1 - A^*) w y'$: In der Beziehung (4.7a) sind zwei mögliche Knickkurven enthalten. Der Schnittpunkt der zum ersten Faktor gehörenden Kurve mit der w-Achse ist bestimmt durch $\operatorname{tg} w_0 = 1/(1 - 2 A^*)$, derjenige der zweiten durch $\operatorname{tg} w_0 = 1/(2 A^* - 1)$. Für $A^* \leqq 1/2$ liefert somit die erste, für $A^* > 1/2$ die zweite das kleinere Moment. Zum gleichen Ergebnis kommt man bei jedem $p < \pi^2/4$, so daß wir auf die Knickformel (4.7) geführt werden. Neben der Beziehung $\operatorname{tg} w_0 = 1/|1 - 2 A^*|$ zeigt auch die Entwicklung

$$\frac{\pi^2}{4} - p = -\Delta p = 2\,|1 - 2\,A^*|\,|w|$$

für kleine w, daß von den hier erfaßten konservativen Momenten das semitangentiale ($A^* = 1/2$) die größten Knicklasten ergibt, während das Knickmoment speziell im quasitangentialen Fall ($A^* = 1$, $A^* = 0$) kleiner ist und allgemein für $A^* \to +\infty$, $A^* \to -\infty$ gegen Null abnimmt.

K n i c k f a l l III, $w_x = w\,(x' + B^* y')$, $w_y = 0$ [Knickgleichung (4.10)]: Die Entwicklung für kleine

$$\Delta p = 2\,|w|\,\left(B^* (\pm) \sqrt{1 + B^{*2}}\right)$$

und die Schnittpunkte mit der w-Achse $\operatorname{tg} 2\,w_0 = -1/B^*$ lassen erkennen, daß für $B^* > 0$ die Kurven außerhalb derjenigen von I, q ($B^* = 0$) verlaufen und für $B^* \to +\infty$ gegen die Kurve I, s streben; für $B^* \to -\infty$ werden die Knickmomente beliebig klein. Beim pseudotangentialen Moment ist B^* eine Funktion von w. Fassen wir auf einer Parallelen zur w-Achse im Abstand p jeden Punkt als Schnittpunkt einer der hier diskutierten Knickkurven auf und bestimmen wir das so zu jedem w gehörige $B^*(w)$, so erhalten wir für $p = 2{,}090$ die in Abb. 9 wiedergegebene Kurve. Sie besitzt zwei Schnittpunkte mit $B^* = \operatorname{tg} 2{,}6\,w$, eine Tatsache, die sich in dem überraschenden Wiederanstieg der Kurve III, p äußert.

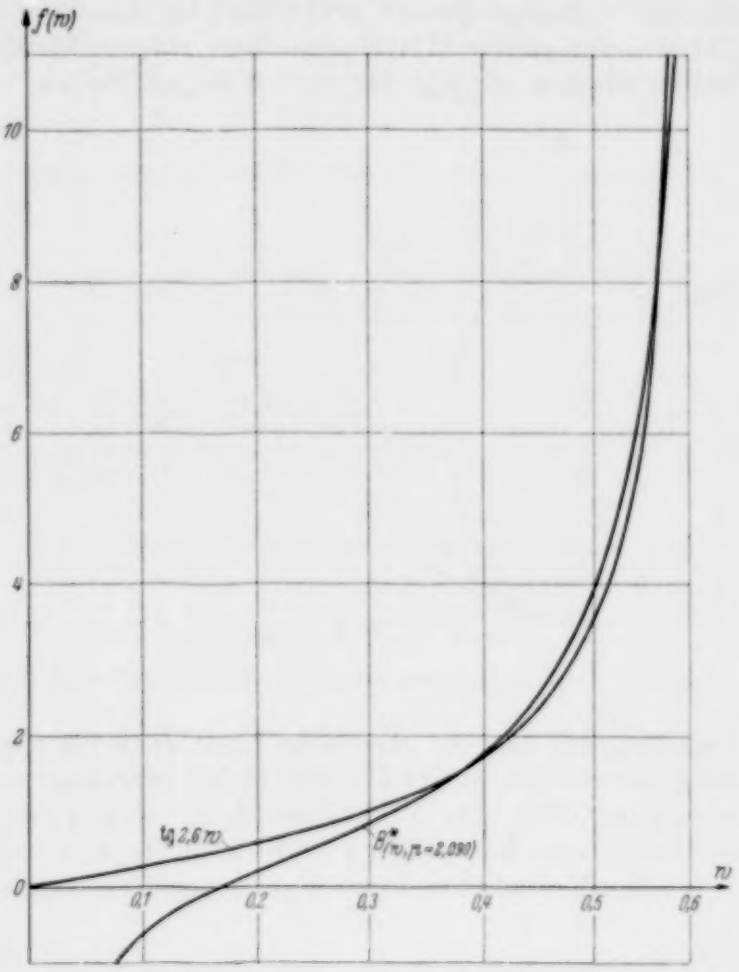


Abb. 9. Zur Diskussion des Knickfalls III.

g) D i e e l a s t i s c h e L i n i e d e s a u s g e k n i c k t e n S t a b e s. Vom statischen Stabilitätskriterium ausgehend versuchten wir die elastische Linie des ausgeknickten Stabes zu ermitteln; beim Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen ergaben sich die Knickgleichungen, und da diese ja das eigentliche Ziel dieser Arbeit sind, wurde die Berechnung der elastischen Linie an jener Stelle abgebrochen. Wir wollen sie nun wenigstens für einige einfache Fälle zu Ende führen.

Bei den Lagerungen III und II haben wir von (4.5) auszugehen. Die Projektion der elastischen Linie auf die (x, y)-Ebene läßt sich [vgl. Ableitung von (4.13)] komplex berechnen:

$$\bar{z} = i \int_0^t \mathsf{F}\, e^{-i\omega t}\, dt = \mathsf{A}\left[\frac{\exp i(\lambda_1 - \omega)\, t - 1}{(\lambda_1 - \omega)} - \frac{\exp i(\lambda_2 - \omega)\, t - 1}{(\lambda_2 - \omega)}\right].$$

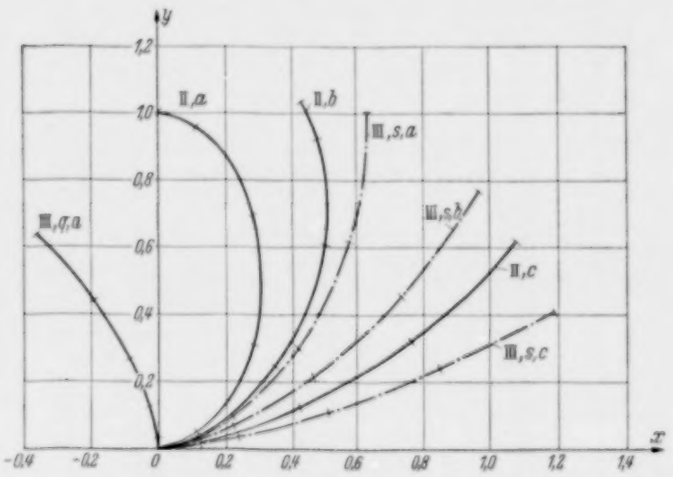
Dabei müssen w und p die zum untersuchten Knickfall gehörige Knickbedingung erfüllen. Für III, s und II ist $\mathsf{A} = A_r + i\, A_i$ frei wählbar, da durch die Randbedingungen keine Richtung ausgezeichnet ist. Mit $\mathsf{A} = -1$ hat ein allgemeiner Punkt $P(x(t),\ y(t),\ z = t)$ der elastischen Linie die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{p}\left[\Phi_2 (1 - \cos \Phi_1 t) + \Phi_1 (1 - \cos \Phi_2 t)\right], \\ y &= \frac{1}{p}\left(\Phi_2 \sin \Phi_1 t - \Phi_1 \sin \Phi_2 t\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

[Φ_1, Φ_2 vgl. (4.21)], woraus für $p = 0$ die Ausdrücke

$$x = \frac{1 - \cos 2wt}{2w}, \quad y = t - \frac{\sin 2wt}{2w} \tag{4.28}$$

entstehen. Einige dieser Kurven sind in Abb. 10 wiedergegeben. Jede Kurve läßt sich als halber (III, s) oder ganzer (II) Bogen einer Hypozykloide auffassen [Grundkreisradius $(\Phi_1 + \Phi_2)/p$, Rollkreisradius Φ_1/p]; für $p = 0$ liegen Bogen von gewöhnlichen Zykloiden vor. Bei der



III, s a: $w = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$; II, a: $w = \pi$, $p = 0$;

III, s b: $w = \frac{\pi}{3}$, $p = \frac{5\pi^2}{36}$; II, b: $w = \frac{3\pi}{4}$, $p = \frac{7\pi^2}{36}$;

III, s, c: $w = \frac{\pi}{6}$, $p = \frac{2\pi^2}{9}$; II, c: $w = \frac{\pi}{3}$, $p = \frac{8\pi^2}{9}$;

III, q, a: $w = \frac{\pi}{4}$, $p = 0$ (markierte Punkte im Abstand $\Delta t = 0{,}2$).

Abb. 10. Der ausgeknickte Stab bei den Lagerungen II und III für die rechts angegebenen Belastungen.

Lagerung III darf die elastische Linie auch für ein quasitangentiales Moment, das die x-Richtung vorschreibt, aus (4.27) oder (4.28) berechnet werden, muß dann aber, weil durch die Randbedingung (4.6) das Verhältnis $A_i/A_r = \operatorname{tg} \alpha$ festgelegt ist, noch um den Winkel α gedreht werden [für die Kurve III, q (a) ist z. B. $A_i/A_r = \infty$].

In den Knickfällen I und V, s—s erhalten wir für

$$\bar{z} = \int_{-1/2}^{t} d\bar{z}$$

eine (4.13) entsprechende verallgemeinerte Beziehung, in der B und C mit Hilfe der Randbedingungen durch A auszudrücken sind. Für $\mathsf{A} = 100/p$ wird die elastische Linie dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{100}{p^2}\left(\Phi_2 \cos \Phi_1 t - \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \cos \Phi_2 t\right) - \frac{100}{p^2}\left(\Phi_2 \cos \frac{\Phi_1}{2} - \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \cos \frac{\Phi_2}{2}\right), \\ y &= \frac{100}{p^2}\left(4\sqrt{w^2 + p} \sin \frac{\Phi_1}{2} \cdot t - \Phi_2 \sin \Phi_1 t - \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \sin \Phi_2 t\right), \\ p = 0\colon\quad x &= \frac{100}{8w^2}\left[2w\left(\frac{1}{4} - t^2\right) - \frac{\cos 2wt - \cos w}{\sin w}\right], \quad y = \frac{100}{8w^2}\left(2t - \frac{\sin 2wt}{\sin w}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

wobei Anfangs- und Endpunkt zu $t = -1/2, t = 1/2$ gehören (zugehörige Knickkurven in Abb. 11). Die in Abb. 12 wiedergegebenen Kurven des Falles V, $s-s$ wurden aus

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{100}{p^2}\left(\Phi_2 \cos \Phi_1 t + \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \cos \Phi_2 t\right) - \frac{100}{p^2}\left(\Phi_2 \cos \frac{\Phi_1}{2} + \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \cos \frac{\Phi_2}{2}\right), \\ y &= \frac{100}{p^2}\left(4 w \sin \frac{\Phi_1}{2} \cdot t - \Phi_2 \sin \Phi_1 t + \Phi_1 \frac{\sin \Phi_1/2}{\sin \Phi_2/2} \sin \Phi_2 t\right), \\ p = 0: \quad x &= \frac{100}{8 w^2}\left[2 w\left(\frac{1}{4} - t^2\right) + \frac{\cos 2 w t - \cos w}{\sin w}\right], \quad y = \frac{100}{8 w^2}\left(\frac{\sin 2 w t}{\sin w} - 2 t\right) \end{aligned}\right\} \quad (4.30)$$

berechnet.

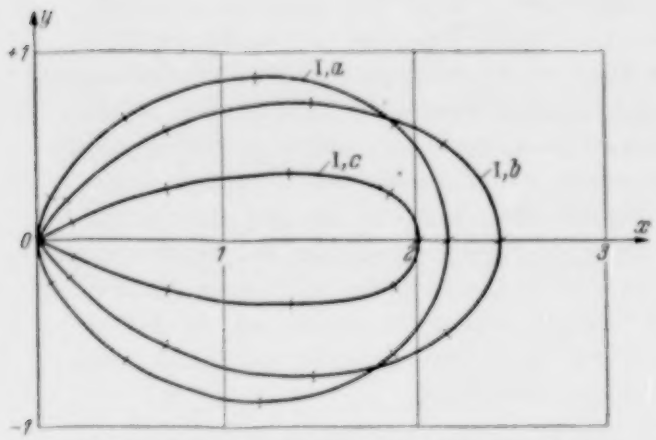


Abb. 11. Der ausgeknickte Stab bei der Lagerung I für die Belastungen I, a: $w = 4{,}4944$, $p = 0$; I, b: $w = 2{,}885$, $p = 20{,}0$; I, c: $w = 1{,}413$, $p = 34{,}0$ (markierte Punkte im Abstand $\Delta t = 0{,}1$).

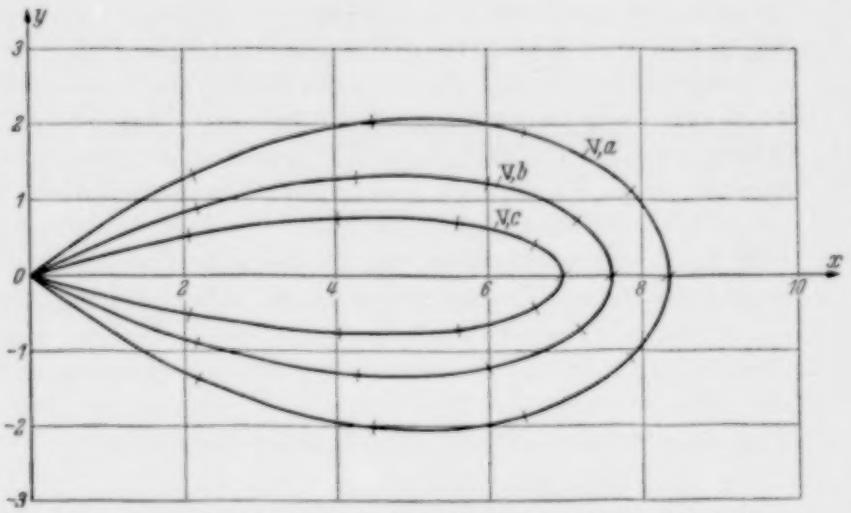


Abb. 12. Der ausgeknickte Stab im Knickfall V, $s-s$ für die Belastungen V, a: $w = 2{,}456$, $p = 0$; V, b: $w = 1{,}683$, $p = 5{,}0$; V, c: $w = 1{,}027$, $p = 8{,}0$ (markierte Punkte im Abstand $\Delta t = 0{,}1$).

(Eingegangen am 20. August 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Phys. *Max Beck*, Zollikerberg bei Zürich (Schweiz), Forchstraße 110.

Über die Koppelung der Dehnungs- und Torsionsschwingungen von umlaufenden Scheiben.

Von **K. Zoller.**

1. Einleitung. Bei einer umlaufenden Scheibe sind die von den Dampfkräften nicht unmittelbar erregbaren Dehnungsschwingungen über die Corioliskraft mit den Torsionsschwingungen verkoppelt, und da zudem die Eigenfrequenzen beider Schwingungsarten von der gleichen Größenordnung sind, muß die dynamische Festigkeitsuntersuchung der Scheibe beide Reihen von Eigenfrequenzen ermitteln[1]. Abschätzungen haben gezeigt, daß bei den heute zulässigen Drehgeschwindigkeiten von Dampfturbinenscheiben diese Untersuchung einfacher an der ruhenden Scheibe durchgeführt werden darf, ein Problem, das man heute vollständig beherrscht. Anders verhält es sich bei höheren Drehgeschwindigkeiten, bei denen die Eigenfrequenzen durch die auftretenden Flieh- und Corioliskräfte stark abgeändert werden. Diese Frage hat zuerst *K. Yamada*[2] zu beantworten versucht, doch können seine Ergebnisse nicht befriedigen, da seine Ausgangsgleichungen einen wesentlichen Fehler enthalten, wie *R. Grammel* bemerkt hat[3]. In der vorliegenden Arbeit soll daher dieses Problem erneut behandelt werden. Dabei beschränken wir uns auf die Bestimmung der Grundfrequenzen und die Abschätzung der zweiten Eigenfrequenzen im Musterfalle einer Scheibe mit hyperbolischem Profil, freiem Außen- und starr eingespanntem Innenrand. Ausgangspunkt der Untersuchung ist das *Hamilton*sche Prinzip, aus dem wir zuerst als Nebenergebnis die exakten Differentialgleichungen für kleine stehende Schwingungen gewinnen. Die Eigenfrequenzen selber werden mit dem *Ritz*schen Verfahren berechnet.

2. Das *Hamilton*sche Prinzip. Wir beziehen (Abb. 1) die Lage der Scheibenteilchen auf ein mit der mittleren Scheibendrehgeschwindigkeit $\omega = \text{konst.}$ umlaufendes Polarkoordinatensystem in der Scheibenmittelebene. Insbesondere seien r, φ die Polarkoordinaten der Scheibenteilchen in ihrer stationären Gleichgewichtslage P_0 auf der mit $\omega = \text{konst.}$ umlaufenden, also vorgespannten Scheibe vom Profil $y(r)$. Bei kleinen, drehsymmetrischen Schwingungen um diese Gleichgewichtslage führen die Teilchen eine zusätzliche Radialverschiebung $\varrho(r,t)$ und eine Tangentialverschiebung um den Winkel $\psi(r,t)$ aus. Beide werden als klein von erster Ordnung angesehen. Wir bezeichnen noch partielle Ableitungen nach der Zeit t durch Punkte und Ableitungen nach dem Radius r durch Striche, z. B. ist

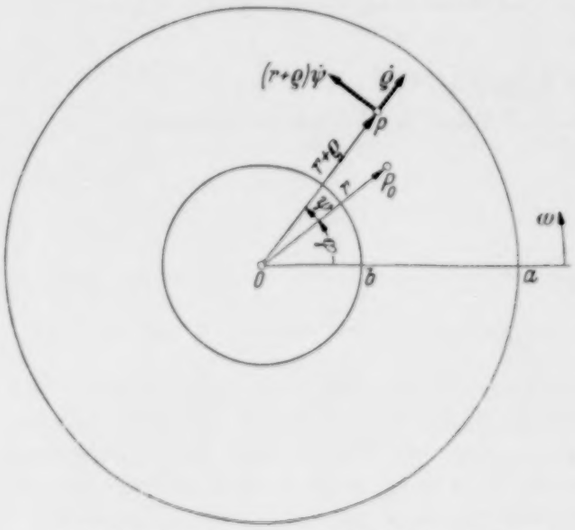


Abb. 1. Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten.

$$\dot{\varrho} \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial t}, \qquad \varrho' \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial r}. \tag{1}$$

Aus den Polarkoordinaten $r+\varrho$, $\varphi+\psi$ der ausgelenkten Teilchen berechnen sich ihre Geschwindigkeitskomponenten in radialer und tangentialer Richtung zu $\dot{\varrho}$ und $(r+\varrho)\,\dot{\psi}$, so daß das Geschwindigkeitsquadrat bis auf Größen, die klein von dritter Ordnung sind,

$$v^2 = \dot{\varrho}^2 + r^2\,\dot{\psi}^2 + ((3.\,O.)) \tag{2}$$

ist. An äußeren Kräften wirken auf die Massenelemente $dm = \frac{\gamma}{g}\, y\, r\, dr\, d\varphi$ in radialer Richtung die Fliehkraft $(r+\varrho)\,\omega^2\, dm$ und eine Komponente $2\,\omega\,(r+\varrho)\,\dot{\psi}\, dm$ der Corioliskraft, deren tangentiale Komponente $-2\,\omega\,\dot{\varrho}\, dm$ ist.

---

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 6 (1935), S. 256 und *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 29ff., 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[2] *K. Yamada*, Proc. Sec. Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1952, S. 343.

[3] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 145.

Um das *Hamilton*sche Prinzip anzuwenden, berechnen wir zuerst die kinetische Energie der Scheibe (bezogen auf das umlaufende Koordinatensystem)

$$T \equiv \int \frac{dm}{2} v^2 = 2\pi \frac{\gamma}{2g} \int_b^a y\, r\, (\dot{\varrho}^2 + r^2 \dot{\psi}^2)\, dr + ((3.\,O.))\,. \tag{3}$$

Hinsichtlich der Formänderungsenergie der Scheibe und ihrer potentiellen Energie im Fliehkraftfeld beachten wir, daß es sich bei der Schwingung um kleine Verschiebungen der Teilchen gegen ihre Gleichgewichtslage P_0 handelt. Daher sind einander entgegengesetzt gleich und können somit unberücksichtigt bleiben: die Formänderungsarbeit gegen die Scheibenvorspannungen und die Arbeit gegen die stationären Fliehkräfte $r\,\omega^2\,dm$. Von der potentiellen Energie im Fliehkraftfeld bleibt so nur der der zusätzlichen Fliehkraft entsprechende Anteil

$$\Phi = -\int \frac{1}{2}\, \varrho\, \omega^2\, dm\, \varrho = -2\pi \frac{\gamma}{2g}\, \omega^2 \int_b^a y\, r\, \varrho^2\, dr\,, \tag{4}$$

der klein von zweiter Ordnung ist. Ebenso tritt eine Formänderungsenergie L derselben Größenordnung infolge der bei der Verschiebung ϱ, ψ geweckten Zusatzspannungen σ_r, σ_φ, τ auf. Diese gehören zu den Verzerrungen

$$\varepsilon_r = \varrho'\,, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{\varrho}{r}\,, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{r}{2}\psi' \tag{5}$$

und berechnen sich aus dem *Hooke*schen Gesetz gemäß

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varrho' + \mu\,\frac{\varrho}{r}\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\,\varrho' + \frac{\varrho}{r}\right), \\ \tau &= G\, r\, \psi'\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo E der Elastizitätsmodul, $\mu = \frac{1}{m}$ die Querzahl und

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{7}$$

der Schubmodul ist. Damit wird die spezifische Formänderungsenergie

$$\frac{1}{2}\,(\sigma_r\,\varepsilon_r + \sigma_\varphi\,\varepsilon_\varphi + 2\,\tau\,\varepsilon_{r\varphi}) = \frac{E}{2\,(1-\mu^2)}\left(\varrho'^2 + 2\,\mu\,\frac{\varrho\,\varrho'}{r} + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) + \frac{G}{2}\, r^2\, \psi'^2 \tag{8}$$

und somit

$$\begin{aligned} L &\equiv \int y\, r\, dr\, d\varphi \cdot \frac{1}{2}\,(\sigma_r\,\varepsilon_r + \sigma_\varphi\,\varepsilon_\varphi + 2\,\tau\,\varepsilon_{r\varphi}) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_b^a y\, r \left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varrho'^2 + 2\,\mu\,\frac{\varrho\varrho'}{r} + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) + G\, r^2\, \psi'^2\right] dr\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Schließlich tritt noch die Arbeit der Corioliskraft bei den virtuellen Verschiebungen $\delta\varrho$, $(r+\varrho)\,\delta\psi$ auf:

$$\begin{aligned} \delta A &\equiv [\int 2\,\omega\,(r+\varrho)\,\dot{\psi}\,\delta\varrho - 2\,\omega\,\dot{\varrho}\,(r+\varrho)\,\delta\psi]\, dm \\ &= 2\pi \cdot 2\,\frac{\gamma}{g}\,\omega \int_b^a y\, r^2\,(\dot{\psi}\,\delta\varrho - \dot{\varrho}\,\delta\psi)\, dr + ((3.\,O.))\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Das *Hamilton*sche Prinzip verlangt nun, daß für beliebige Zeitpunkte t_1, t_2 die Variation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Phi - L)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A\, dt = 0 \tag{11}$$

wird, wobei die virtuellen Änderungen $\delta\varrho$, $\delta\psi$ für t_1 und t_2 verschwinden und, wie die Koordinaten ϱ, ψ selber, die geometrischen Randbedingungen starrer Einspannung am Innenrand $r = b$ erfüllen müssen:

$$\left.\begin{aligned} &(\delta\varrho)_{t_1} = (\delta\varrho)_{t_2} = (\delta\psi)_{t_1} = (\delta\psi)_{t_2} = 0\,, \\ &\delta\varrho = \delta\psi = 0 \quad \text{für} \quad r = b\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

3. Die Bewegungsgleichungen. Führt man in (11) mit (3), (4), (9) und (10) die Variation aus, so läßt es sich durch Teilintegration nach der Zeit t und nach dem Radius r stets erreichen, daß im Integrand von (11) nur die virtuellen Änderungen $\delta\varrho$ und $\delta\psi$, aber keine zeitlichen oder örtlichen Ableitungen davon auftreten. Wählt man dann $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$, so folgen in bekannter Schlußweise die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \gamma\, r\, \ddot{\varrho} &= \frac{g}{\gamma}\frac{E}{1-\mu^2}\left[(\gamma\, r\, \varrho' + \mu\, \gamma\, \varrho)' - \mu\, \gamma\, \varrho' - \frac{\gamma}{r}\varrho\right] + 2\,\omega\,\gamma\, r^2\,\dot{\psi} + \underline{\omega^2\,\gamma\, r\,\varrho}\,, \\ \gamma\, r^2\,\ddot{\psi} &= \frac{g}{\gamma}\,G\,[(\gamma\, r^2\,\psi')' + \gamma\, r\,\psi'] - 2\,\omega\,\gamma\, r\,\dot{\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

und dazu am freien Außenrand $r = a$ die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho' + \frac{\mu}{r}\varrho &= 0\,, \\ \psi' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } r = a\,. \tag{14}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bewegungsgleichungen (13) mit den *Grammel*schen Gleichungen übereinstimmen, wobei nur die erste der Gleichungen (13) ein von der Fliehkraft herrührendes Glied $\omega^2\,\gamma\, r\,\varrho$ enthält, das man bei den heute vorkommenden Drehgeschwindigkeiten ω mit gutem Grund wegläßt. Die *Yamada*schen Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (13) dadurch, daß sie in der zweiten Gleichung ein mechanisch sinnloses „Fliehkraftglied" $\omega^2\,\gamma\, r^2\,\psi$ enthalten.

Gehen wir nun zu drehsymmetrischen, stationären Schwingungen über, so genügt es nach (13), für sie den Ansatz

$$\varrho = R(r)\cos\alpha\, t\,, \qquad \psi = \Psi(r)\sin\alpha\, t \tag{15}$$

zu machen. Durch Einsetzen von (15) in (13) findet man für die Amplitudenfunktionen R, Ψ das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{g}{\gamma}\frac{E}{1-\mu^2}\left[(\gamma\, r\, R' + \mu\, \gamma\, R)' - \mu\, \gamma\, R' - \frac{\gamma}{r}R\right] + (\alpha^2 + \omega^2)\,\gamma\, r\, R + 2\,\alpha\,\omega\,\gamma\, r^2\,\Psi = 0\,, \\ &2\,\alpha\,\omega\,\gamma\, r\, R + \frac{g}{\gamma}\,G\,[(\gamma\, r^2\,\Psi')' + \gamma\, r\,\Psi'] + \alpha^2\,\gamma\, r^2\,\Psi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

und dazu noch die Randbedingungen innen und außen

$$\left.\begin{aligned} R(b) &= \Psi(b) = 0\,, \\ R'(a) + \frac{\mu}{a}\,R(a) &= \Psi'(a) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Damit sind wir auf ein Eigenwertproblem für die Eigenfrequenzen α gekommen, das wir aber nicht weiter verfolgen wollen, da sich die Eigenfrequenzen müheloser auf andere Weise ermitteln lassen.

4. Das *Hamilton*sche Prinzip bei stationären Schwingungen. Wir gehen mit dem Ansatz (15) für stationäre Schwingungen in die Energie- und Arbeitsausdrücke (3), (4), (9), (10) ein und nehmen als virtuelle Änderungen

$$\delta\varrho = \delta R\cos\alpha\, t\,, \qquad \delta\psi = \delta\Psi\sin\alpha\, t\,. \tag{18}$$

Damit kommt

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\,\pi\,\frac{\gamma}{2g}\,\alpha^2\int_b^a \gamma\, r\,(R^2\sin^2\alpha\, t + r^2\,\Psi^2\cos^2\alpha\, t)\,dr\,, \\ \Phi &= -\,2\,\pi\,\frac{\gamma}{2g}\,\omega^2\int_b^a \gamma\, r\, R^2\cos^2\alpha\, t\,dr\,, \\ L &= 2\,\pi\cdot\frac{1}{2}\int_b^a \gamma\, r\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(R'^2 + 2\,\mu\,\frac{R\,R'}{r} + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos^2\alpha\, t + G\, r^2\,\Psi'^2\sin^2\alpha\, t\right]dr\,, \\ \delta A &= 2\,\pi\cdot 2\,\frac{\gamma}{g}\,\alpha\,\omega\int_b^a \gamma\, r^2\,(\Psi\,\delta R\cos^2\alpha\, t + R\,\delta\Psi\sin^2\alpha\, t)\,dr\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für die weitere Rechnung ist es nun zweckmäßig, dimensionslose Größen zu verwenden. Ohne Änderung der Bezeichnung sollen jetzt alle Längen in Vielfachen des äußeren Scheibenhalbmessers a ausgedrückt sein, d. h. wir schreiben im folgenden durchweg einfach wieder r, R, y, b anstelle von r/a, R/a, y/a, b/a. Außerdem führen wir die bezogene Drehgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\gamma a^2}{g G}} \tag{20}$$

und anstelle der Eigenfrequenz α den ebenfalls dimensionslosen Eigenwert

$$\lambda = \alpha \sqrt{\frac{\gamma a^2}{g G}} \tag{21}$$

ein. Hiermit wird aus (19)

$$\left.\begin{aligned}
\overline{T} &\equiv \frac{T}{2\pi G a^3} = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_b^1 y\, r\, (R^2 \sin^2 \alpha t + r^2 \Psi^2 \cos^2 \alpha t)\, dr\,, \\
\overline{\Phi} &\equiv \frac{\Phi}{2\pi G a^3} = -\frac{1}{2}\Omega^2 \int_b^1 y\, r\, R^2 \cos^2 \alpha t\, dr\,, \\
\overline{L} &\equiv \frac{L}{2\pi G a^3} = \frac{1}{2}\int_b^1 y\, r \left[\frac{2}{1-\mu}\left(R'^2 + 2\mu \frac{R R'}{r} + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos^2 \alpha t + r^2 \Psi'^2 \sin^2 \alpha t\right] dr\,, \\
\delta \overline{A} &\equiv \frac{\delta A}{2\pi G a^3} = 2\lambda \Omega \int_b^1 y\, r^2 (\Psi\, \delta R \cos^2 \alpha t + R\, \delta \Psi \sin^2 \alpha t)\, dr\,.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Bei der Ausführung der Variation (11)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\overline{T} - \overline{\Phi} - \overline{L})\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \overline{A}\, dt = 0 \tag{23}$$

wollen wir einmal die Integrationsgrenzen $t_1 = \pi/2\alpha$, $t_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)/\alpha$ wählen, müssen dann aber nach (18) mit Rücksicht auf (12) $\delta \Psi \equiv 0$ setzen. Das Ergebnis der zeitlichen Integration hebt sich wegen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \alpha t\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 \alpha t\, dt \tag{24}$$

als unwesentlicher gemeinsamer Faktor weg und es bleibt die Bedingung

$$\begin{aligned}
&(\lambda^2 + \Omega^2) \int_b^1 y\, r\, R\, \delta R\, dr + 2\lambda \Omega \int_b^1 y\, r^2 \Psi\, \delta R\, dr \\
&- \frac{2}{1-\mu} \int_b^1 y\, r \left[R'\, \delta R' + \frac{\mu}{r}(R\, \delta R' + R'\, \delta R) + \frac{1}{r^2}\, R\, \delta R\right] dr = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

übrig. Wählen wir weiter $t_1 = 0$ und $t_2 = 2\pi/\alpha$, so ist jetzt entsprechend $\delta R \equiv 0$ zu setzen, und die Variationsbedingung geht in die Beziehung

$$\lambda^2 \int_b^1 y\, r^3\, \Psi\, \delta \Psi\, dr + 2\lambda \Omega \int_b^1 y\, r^2\, R\, \delta \Psi\, dr - \int_b^1 y\, r^3\, \Psi'\, \delta \Psi'\, dr = 0 \tag{26}$$

über.

5. Das *Ritz*sche Verfahren. Aus den Gleichungen (25) und (26) lassen sich die Eigenwerte λ mit Hilfe des *Ritz*schen Verfahrens ausreichend genau bestimmen. Wir gehen hierzu von den k-gliedrigen *Ritz*ansätzen

$$R = \sum_{i=1}^{k} a_i\, \mathfrak{x}_i(r)\,, \qquad \Psi = \sum_{i=1}^{k} b_i\, \mathfrak{y}_i(r)\,, \tag{27}$$

also
$$\left.\begin{aligned} \delta R &= \sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i\,, & \delta \Psi &= \sum \delta b_i\, \mathfrak{y}_i\,, \\ \delta R' &= \sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i'\,, & \delta \Psi' &= \sum \delta b_i\, \mathfrak{y}_i' \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

aus. Die Genauigkeit der Rechnung wird erheblich gesteigert, wenn wir die Koordinatenfunktionen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$ nicht nur die geometrischen, sondern sämtliche für R und Ψ bestehenden Randbedingungen (17) erfüllen lassen:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{x}_i(b) = \mathfrak{y}_i(b) = 0\,, \\ &\mathfrak{x}_i'(1) + \mu\, \mathfrak{x}_i(1) = \mathfrak{y}_i'(1) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Diese Eigenschaften haben beispielsweise die Funktionen

$$\mathfrak{x} = (r-b)^n + p\,(r-b)^{n+1}$$

mit
$$p = -\frac{n + \mu\,(1-b)}{(1-b)\,[n+1+\mu\,(1-b)]}$$

und
$$\mathfrak{y} = (r-b)^n + q\,(r-b)^{n+1}$$

mit
$$q = -\frac{n}{(n+1)\,(1-b)}\,.$$

Insbesondere wählen wir

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= r - b + p_1\,(r-b)^2 && \text{mit} && p_1 = -\frac{1+\mu\,(1-b)}{(1-b)\,[2+\mu\,(1-b)]}\,, \\ \mathfrak{x}_2 &= (r-b)^3 + p_2\,(r-b)^4 && \text{mit} && p_2 = -\frac{3+\mu\,(1-b)}{(1-b)\,[4+\mu\,(1-b)]}\,, \\ \mathfrak{y}_1 &= r - b + q_1\,(r-b)^2 && \text{mit} && q_1 = -\frac{1}{2\,(1-b)}\,, \\ \mathfrak{y}_2 &= (r-b)^3 + q_2\,(r-b)^4 && \text{mit} && q_2 = -\frac{3}{4\,(1-b)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Setzt man nun (27) und (28) in die Variationsbedingungen (25) und (26) ein, so kommt

$$(\lambda^2 + \Omega^2) \int_b^1 y\, r\, (\sum a_j\, \mathfrak{x}_j)\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i)\, dr + 2\,\lambda\,\Omega \int_b^1 y\, r^2\, (\sum b_j\, \mathfrak{y}_j)\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i)\, dr$$
$$- \frac{2}{1-\mu} \int_b^1 y\, r\, [(\sum a_j\, \mathfrak{x}_j')\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i') + \frac{\mu}{r}\, (\sum a_j\, \mathfrak{x}_j)\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i') + \frac{\mu}{r}\, (\sum a_j\, \mathfrak{x}_j')\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i)$$
$$+ \frac{1}{r^2}\, (\sum a_j\, \mathfrak{x}_j)\, (\sum \delta a_i\, \mathfrak{x}_i)]\, dr = 0$$

sowie
$$\lambda^2 \int_b^1 y\, r^3\, (\sum b_j\, \mathfrak{y}_j)\, (\sum \delta\, b_i\, \mathfrak{y}_i)\, dr + 2\,\lambda\,\Omega \int_b^1 y\, r^2\, (\sum a_j\, \mathfrak{x}_j)\, (\sum \delta b_i\, \mathfrak{y}_i)\, dr$$
$$- \int_b^1 y\, r^3\, (\sum b_j\, \mathfrak{y}_j')\, (\sum \delta b_i\, \mathfrak{y}_i')\, dr = 0\,.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man in bekannter Weise ein lineares, homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten a_j und b_j, das mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A_{ij} &= \int_b^1 y\, r\, \mathfrak{x}_i\, \mathfrak{x}_j\, dr\,, & B_{ij} &= \int_b^1 y\, r^2\, \mathfrak{x}_i\, \mathfrak{y}_j\, dr\,, \\ C_{ij} &= \frac{2}{1-\mu} \int_b^1 y\, r \left[\mathfrak{x}_i'\, \mathfrak{x}_j' + \frac{\mu}{r}\, (\mathfrak{x}_i\, \mathfrak{x}_j' + \mathfrak{x}_i'\, \mathfrak{x}_j) + \frac{1}{r^2}\, \mathfrak{x}_i\, \mathfrak{x}_j\right] dr\,, \\ D_{ij} &= \int_b^1 y\, r^3\, \mathfrak{y}_i\, \mathfrak{y}_j\, dr\,, & E_{ij} &= \int_b^1 y\, r^3\, \mathfrak{y}_i'\, \mathfrak{y}_j'\, dr \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

von der Form

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} a_j\, [(\lambda^2 + \Omega^2)\, A_{ij} - C_{ij}] + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot 2\,\lambda\,\Omega\, B_{ij} = 0\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1\,, \ldots k) \\ &\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 2\,\lambda\,\Omega\, B_{ji} + \sum_{j=1}^{k} b_j\, (\lambda^2\, D_{ij} - E_{ij}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ist. Die Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante dieses Gleichungssystems sind obere Näherungswerte der $2k$ ersten Eigenwerte λ und damit der entsprechenden Eigenfrequenzen α der Scheibenschwingungen. Wie man sieht, zerfällt bei ruhender Scheibe ($\Omega = 0$) das Gleichungssystem (32) in ein System, das nur die a_j als Unbekannte, und in ein zweites System, das nur die b_j als Unbekannte enthält. Demgemäß zerfällt die Frequenzgleichung in deren zwei, die in getrennten Reihen die Eigenwerte $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ bzw. Frequenzen der Dehnungsschwingungen und die Eigenwerte $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ bzw. Frequenzen der Torsionsschwingungen liefern. Da für beliebige Werte Ω diese Frequenzen stetig von Ω abhängen, kann man danach auch für $\Omega \neq 0$ die Eigenwerte in zwei entsprechende Teilfolgen (λ_i') und (λ_i'') aufteilen, die die Dehnungs- bzw. die torsionale Folge heißen mögen, wenn auch diese Bezeichnung hinsichtlich der Schwingungsformen der Koppelschwingungen eigentlich nur für $\Omega \to 0$ sinnvoll ist.

1) Eingliedrige *Ritz*ansätze ($k = 1$): Schon recht gute Näherungswerte für die beiden niedersten Eigenwerte λ_1' und λ_1'' erhalten wir aus den eingliedrigen *Ritz*ansätzen

$$R = a_1 \mathfrak{x}_1(r) , \qquad \Psi = b_1 \mathfrak{y}_1(r) . \tag{33}$$

Die charakteristische Gleichung lautet in diesem Falle

$$A_{11} D_{11} \lambda^4 + [\Omega^2 (A_{11} D_{11} - 4 B_{11}^2) - A_{11} E_{11} - C_{11} D_{11}] \lambda^2 - E_{11} (\Omega^2 A_{11} - C_{11}) = 0 . \tag{34}$$

Insbesondere bei ruhender Scheibe ($\Omega = 0$) ergeben sie die beiden Näherungswerte von oben

$$\lambda_{10}' \approx \sqrt{\frac{C_{11}}{A_{11}}}, \qquad \lambda_{10}'' \approx \sqrt{\frac{E_{11}}{D_{11}}}. \tag{35}$$

2) Zweigliedrige *Ritz*ansätze ($k = 2$): Sehr gute Näherungswerte für λ_1', λ_1'' und gute Abschätzungen von oben für die nächsten Eigenwerte λ_2', λ_2'' werden durch zweigliedrige *Ritz*ansätze geliefert. Die Auswertung der Determinante führt auf eine charakteristische Gleichung von der Form

$$c_0 \lambda^8 + c_1 \lambda^6 + c_2 \lambda^4 + c_3 \lambda^2 + c_4 = 0 , \tag{36}$$

deren Koeffizienten sich aus den Hilfsgrößen

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2 , \\
S_2 &= 2\,\Omega^2 S_1 - A_{11} C_{22} - A_{22} C_{11} + 2 A_{12} C_{12} , \\
S_3 &= (\Omega^2 A_{11} - C_{11})(\Omega^2 A_{22} - C_{22}) - (\Omega^2 A_{12} - C_{12})^2 = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 + \Omega^2 (S_2 - \Omega^2 S_1) , \\
S_4 &= D_{11} D_{22} - D_{12}^2 , \\
S_5 &= D_{11} E_{22} + D_{22} E_{11} - 2 D_{12} E_{12} , \\
S_6 &= E_{11} E_{22} - E_{12}^2 , \\
S_7 &= A_{11} B_{21} - A_{12} B_{11} , \\
S_8 &= B_{21} (\Omega^2 A_{11} - C_{11}) - B_{11} (\Omega^2 A_{12} - C_{12}) = \Omega^2 S_7 + B_{11} C_{12} - B_{21} C_{11} , \\
S_9 &= B_{21} D_{22} - B_{22} D_{12} , \\
S_{10} &= B_{22} E_{12} - B_{21} E_{22} , \\
S_{11} &= A_{11} B_{22} - A_{12} B_{12} , \\
S_{12} &= B_{22} (\Omega^2 A_{11} - C_{11}) - B_{12} (\Omega^2 A_{12} - C_{12}) = \Omega^2 S_{11} + B_{12} C_{12} - B_{22} C_{11} , \\
S_{13} &= B_{21} D_{12} - B_{22} D_{11} , \\
S_{14} &= B_{22} E_{11} - B_{21} E_{12} , \\
S_{15} &= A_{12} B_{21} - A_{22} B_{11} , \\
S_{16} &= B_{21} (\Omega^2 A_{12} - C_{12}) - B_{11} (\Omega^2 A_{22} - C_{22}) = \Omega^2 S_{15} + B_{11} C_{22} - B_{21} C_{12} , \\
S_{17} &= B_{11} D_{22} - B_{12} D_{12} , \\
S_{18} &= B_{12} E_{12} - B_{11} E_{22} , \\
S_{19} &= A_{12} B_{22} - A_{22} B_{12} , \\
S_{20} &= B_{22} (\Omega^2 A_{12} - C_{12}) - B_{12} (\Omega^2 A_{22} - C_{22}) = \Omega^2 S_{19} + B_{12} C_{22} - B_{22} C_{12} , \\
S_{21} &= B_{11} D_{12} - B_{12} D_{11} , \\
S_{22} &= B_{12} E_{11} - B_{11} E_{12} , \\
S_{23} &= (B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21})^2
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

gemäß

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= S_1 S_4 , \\ c_1 &= -S_1 S_5 + S_2 S_4 + 4\,\Omega^2 (-S_7 S_9 + S_{11} S_{13} + S_{15} S_{17} - S_{19} S_{21}) , \\ c_2 &= S_1 S_6 - S_2 S_5 + S_3 S_4 + 4\,\Omega^2 (-S_7 S_{10} - S_8 S_9 + S_{11} S_{14} + S_{12} S_{13} \\ &\quad + S_{15} S_{18} + S_{16} S_{17} - S_{19} S_{22} - S_{20} S_{21} + 4\,\Omega^2 S_{23}) , \\ c_3 &= S_2 S_6 - S_3 S_5 + 4\,\Omega^2 (-S_8 S_{10} + S_{12} S_{14} + S_{16} S_{18} - S_{20} S_{22}) , \\ c_4 &= S_3 S_6 \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

berechnen. Bei ruhender Scheibe ($\Omega = 0$) spaltet sich die Gleichung (36) in die zwei Gleichungen

$$\lambda^4 S_1 + \lambda^2 S_2(0) + S_3(0) = 0 \quad (39)$$

für die Näherungswerte von λ_1', λ_2' und

$$\lambda^4 S_4 - \lambda^2 S_5 + S_6 = 0 \quad (40)$$

für die Näherungswerte von λ_1'', λ_2'' auf.

6. Beispiele. Um den Einfluß der Drehgeschwindigkeit auf die Eigenfrequenzen auch zahlenmäßig zu erkennen, wollen wir die vorstehenden Gleichungen für eine Scheibe von hyperbolischem Profil

$$y = \frac{\text{konst.}}{r^3} \quad (41)$$

mit dem Innenhalbmesser $b = \frac{1}{2}$ bei einer Querzahl $\mu = \frac{1}{4}$ $(m = 4)$ auswerten. Die Frequenzgleichung (34) wird hier

$$\lambda^4 - 2\,\lambda^2 (34{,}515 + 1{,}45\,064\,\Omega^2) + 589{,}835 - 9{,}9906\,\Omega^2 = 0 . \quad (42)$$

Gleichung (42) möge für ein Drehgeschwindigkeitsintervall $0 \leq \Omega \leq \Omega^*$ ausgewertet werden, wo Ω^* dadurch definiert ist, daß für $\Omega \to \Omega^*$ der niederste Eigenwert, als welcher sich λ_1'' erweist, gegen Null strebt. Aus den Gleichungen (16) und (17) findet man leicht die Beziehung

$$\Omega^* = \lambda_1' (\Omega = 0) . \quad (43)$$

Die Wurzeln von (42) für verschiedene Drehgeschwindigkeiten sind in der Tabelle 1 angegeben.

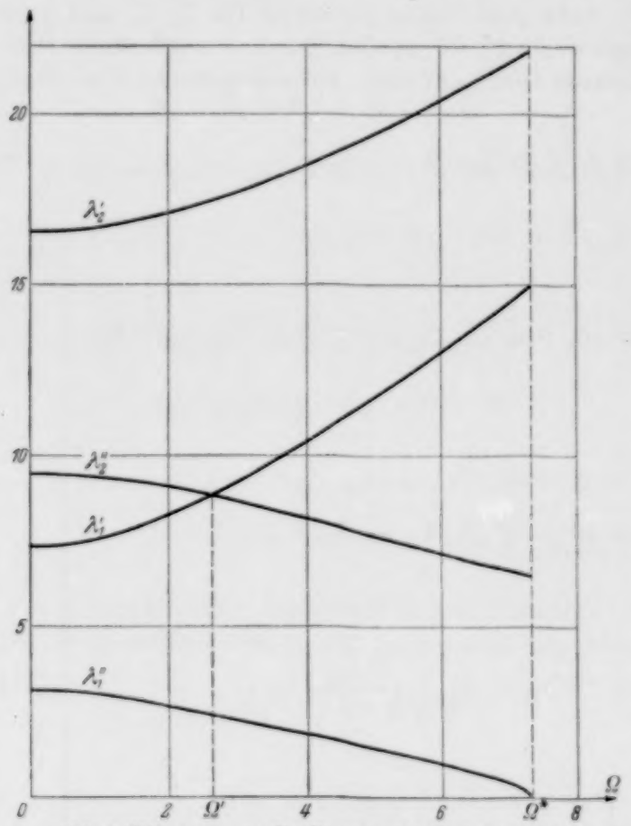


Abb. 2. Näherungswerte für die ersten vier Eigenwerte bei hyperbolischem Scheibenprofil (41) mit $b = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$.

Tabelle 1. *Wurzeln der Frequenzgleichung* (42).

Ω	λ_1'	λ_1''
0	7,6837	3,1608
0,04	7,6841	3,1605
2	8,5507	2,3496
4	10,564	1,9629
6	13,120	1,1563
$\Omega^* \approx$ 7,6837	15,502	0

Die Güte dieser Näherung beurteilen wir aus den exakten Werten λ_1', λ_1'' bei ruhender Scheibe. Die genaue Frequenzgleichung für die Dehnungsschwingungen[1] liefert in unserem Fall den Wert $\lambda_1' = 7{,}283$, so daß der Näherungswert $\lambda_1' = 7{,}6837$ mit 5,5% Fehler noch als mäßig gut gelten kann. Wesentlich besser sind die Näherungswerte für die torsionalen Frequenzen. Die genaue Frequenzgleichung[2] ergibt $\lambda_1'' = \pi$; dagegen ist der Näherungswert $\lambda_1'' = 3{,}1608$ nur um 0,61% zu groß.

[1] A. a. O. *R. Grammel* (1935), S. 262, Gl. (31).
[2] A. a. O. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, S. 37, Gl. (17).

Zweigliedrige *Ritz*ansätze führen zu den Näherungswerten von Tabelle 2 für die Eigenwerte (Abb. 2).

Tabelle 2. *Näherungswerte für die Eigenwerte bei zweigliedrigen Ritzansätzen.*

Ω	λ_1'	λ_2'	λ_1''	λ_2''
0	7,32267 (0,545%)	16,563 (1%)	3,1460 (0,15%)	9,47428 (0,525%)
0,04	7,3230	16,5634	3,1458	9,4741
1	7,5791	16,7063	3,0108	9,3766
3	9,2536	17,7356	2,2753	8,6852
5	11,6873	19,4298	1,4415	7,6948
7	14,5028	21,5153	0,46658	6,6064
$\Omega^* \approx$ 7,32267	14,9804	21,8782	0	6,4298

Die in der Zeile $\Omega = 0$ der Tabelle 2 angegebenen prozentualen Fehler zeigen, daß auch noch der zweite Eigenwert λ_2' in guter Näherung vorliegt, Man bemerkt, daß mit zunehmender Drehgeschwindigkeit die torsionalen Eigenwerte abnehmen, dagegen die Eigenwerte der Dehnungsgruppe ebenfalls anwachsen. Dabei fällt für einen Wert Ω' mit $1 < \Omega' < 3$ der Wert λ_2' mit dem Wert λ_2'' zusammen (Abb. 2).

Der Wert $\Omega = 0{,}04$ entspricht etwa heute zulässigen Drehgeschwindigkeiten von Turbinenscheiben. Die zugehörigen Eigenwerte unterscheiden sich von denen bei ruhender Scheibe nur ganz unwesentlich, so daß auch auf diesem Wege das übliche Verfahren der Berechnung der Eigenfrequenzen gerechtfertigt ist. Nun ist allerdings zu erwarten, daß die Abweichungen zwischen beiden Lösungen bei dem Scheibenprofil (41) gerade besonders klein ausfallen[1]: Daher sollen die Verhältnisse, allerdings nur mit eingliedrigen *Ritz*ansätzen, auch noch für die Scheibe gleicher Dicke

$$y = \text{konst.} \tag{44}$$

untersucht werden. Man findet hier die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 (15{,}33\,343 + 1{,}46\,443\,\Omega^2) + 110{,}77\,307 - 4{,}18\,260\,\Omega^2 = 0 \tag{45}$$

mit den Wurzeln nach Tabelle 3.

Tabelle 3. *Wurzeln der Gl.* (45).

Ω	λ_1'	λ_1''
0	5,1463	2,0451
0,04	5,1469	2,0449
1	5,4817	1,8834
3	7,4642	1,1457
5	10,1897	0,2445
5,14629	10,4037	0

Die Eigenwerte zeigen gleiches Verhalten wie beim Profil (41), insbesondere wird nochmals bestätigt, daß man bei den heute vorkommenden Drehgeschwindigkeiten von Turbinenscheiben die Eigenfrequenzen der ruhenden Scheibe nehmen darf.

(Eingegangen am 20. September 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *K. Zoller*, Stuttgart-Sillenbuch, Kirchheimerstr. 21.

[1] A. a. O. *R. Grammel* (1935), S. 260.

Rheolineare Drehschwingungen in Kolbenmotoren.

Von F. Weidenhammer.

1. Zielsetzung[1]. Bei der Berechnung der Drehschwingungen[2] in den Kurbelwellen der Kolbenmotore geht man von einem System aus, bei welchem die Kurbelwelle ersatzweise als eine nichtgekröpfte, mit einzelnen Scheiben besetzte Welle angesehen wird. Die hin- und hergehenden Triebwerkteile bilden sich in diesem Ersatzbild als periodisch veränderliche Drehmassen ab, und die zugehörigen Schwingungsgleichungen sind demnach inhomogene Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten und periodischen Störungsfunktionen. Die Störglieder dieser Gleichungen rühren im wesentlichen von den Momenten der Gaskräfte her, enthalten aber auch einen Bestandteil, der allein durch die Schwankungen der Drehmassen bedingt ist. In linearer Näherung für die Verdrehwinkel beschreiben diese Gleichungen erzwungene rheolineare Drehschwingungen.

Zur Berechnung der resonanzkritischen Drehzahlen aus diesen Schwingungsgleichungen sucht man üblicherweise die periodischen Lösungen der verkürzten Gleichungen und die zugehörigen Eigenfrequenzen auf. Da nämlich hier bei Übereinstimmung der Drehgeschwindigkeit mit einem dieser Frequenzwerte unbegrenzt mit der Zeit anwachsende spezielle Lösungen der vollständigen Differentialgleichungen vorhanden sind, liegt genau dann ein Resonanzfall vor, und die so berechneten Eigenfrequenzen sind unmittelbar die Resonanzfrequenzen. Man beurteilt also das Resonanzverhalten ausschließlich nach dem Verhalten der speziellen Lösungen der unverkürzten Differentialgleichungen.

Die vollständige Lösung eines Differentialgleichungssystems setzt sich jedoch linear aus einem Fundamentalsystem von Lösungen der verkürzten Gleichungen und einer speziellen Lösung der vollständigen Gleichungen zusammen. Die übliche Drehschwingungsberechnung befaßt sich daher offenbar nur mit der Diskussion der speziellen Lösungen der unverkürzten Gleichungen, die im weiteren ihrer mechanischen Bedeutung entsprechend als erzwungene Schwingungen bezeichnet werden sollen. Im Gegensatz hierzu sollen die Lösungen der verkürzten Gleichungen als „freie" Schwingungen bezeichnet werden, obgleich diese Bezeichnung dem mechanischen Sachverhalt insofern nicht gerecht wird, als auch ohne äußere Gaskräfte schon von den periodisch veränderlichen Drehmassen herrührende, erregende Momente vorhanden sind und es also freie Schwingungen im eigentlichen Sinne nicht gibt. Im weiteren sollen ausschließlich die Lösungen des verkürzten Differentialgleichungssystemes berechnet werden. Hierzu besteht insofern Veranlassung, als bekannt ist, daß sich derartige „freie" rheolineare Schwingungen unter Umständen ebenso wie die erzwungenen Schwingungen mit der Zeit unbegrenzt aufschaukeln können. Auf die Bedeutung dieser „freien" Schwingungen für die Drehschwingungen in Kolbenmotoren hat bereits *G. R. Goldsbrough*[4] hingewiesen. Er hat insbesondere an einem Labormodell für eine Einzylindermaschine die „freien" Schwingungen als gefährlich anwachsend nachweisen können, wobei in seinen Meßergebnissen die „freien" und die erzwungenen Schwingungen eindeutig zu unterscheiden sind. Allerdings ergeben sich bei seinen Betrachtungen praktisch keine anderen Drehzahlen als kritisch, als die übliche Beurteilung des Resonanzverhaltens über die erzwungenen Schwingungen liefert. Jedoch untersucht *G. R. Goldsbrough* nicht den allgemeinen Fall einer Mehrzylindermaschine mit mehreren Drehschwingungsfreiheitsgraden. Heute bereitet es indes keine Schwierigkeiten, die Untersuchungen auf den allgemeinen Fall auszudehnen, da in der Zwischenzeit Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten in anderem Zusammenhang mehrfach untersucht worden sind. So fand *E. Mettler*[5] einen mit der Zeit unbegrenzt anwachsenden Typ freier Schwingungen, dessen Frequenzen bemerkenswerterweise nicht mit denen der erzwungenen Schwingungen zusammenfallen, sondern sich nach Art der Schwe-

[1] Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. *E. Mettler* für die Anregung zu dieser Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet.

[2] Zusammenfassende Darstellung in *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 347, 2. Aufl. 1953.

[3] Vgl. z. B. *K. Klotter*, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., S. 350, Berlin 1951.

[4] *G. R. Goldsbrough*, Proc. Roy. Soc. London A 109 (1925), S. 99 und A 113 (1927), S. 259.

[5] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 431.

bungsfrequenzen aus den Eigenfrequenzen zusammensetzen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, an einem Beispiel zu zeigen, daß durch die „freien" rheolinearen Schwingungen unter Umständen zusätzliche, bisher nicht beachtete kritische Drehzahlbereiche entstehen können.

Den nachfolgenden Betrachtungen haftet eine gewisse Unsicherheit dadurch an, daß man in gewissem Umfange dämpfende Kräfte in die Rechnung einbeziehen muß, da „freie" Schwingungen unter Umständen ganz weggedämpft werden können. Es wird sich jedoch zeigen, daß selbst bei vorsichtiger Einschätzung der für die Dämpfung bekanntgewordenen Zahlenwerte noch gefährlich anwachsende Schwingungen zu erwarten sind. Allerdings werden sich dann nicht die unbegrenzten Schwingungsamplituden der linearen Theorie einstellen, sondern es wird vermutlich nur eine gewisse Laufunruhe entstehen, die im einzelnen nur mit einer nichtlinearen Theorie beschrieben werden könnte.

2. Diskussion der Schwingungsgleichungen. a) Einleitung. Bezeichnet man mit ψ_k den gesamten Drehwinkel jeder Kurbel, so setzt sich dieser aus dem mittleren Drehwinkel ωt (ω Drehgeschwindigkeit der Welle, t Zeit), dem Kurbelversetzungswinkel χ_k und dem Verdrehwinkel $\vartheta_k(t)$ zusammen:

$$\psi_k = \omega t + \chi_k + \vartheta_k . \tag{1}$$

Die Bewegungsgleichungen für Drehschwingungen um die gleichförmige Drehung der Kurbelwelle lauten dann[1]

$$\Psi_k(\psi_k)\,\ddot{\vartheta}_k + \frac{1}{2}\frac{d\Psi_k}{d\psi_k}(\omega + \dot{\vartheta}_k)^2 + \beta\,\dot{\vartheta}_k + c_{k-1,k}\,(\vartheta_k - \vartheta_{k-1}) - c_{k,k+1}\,(\vartheta_{k+1} - \vartheta_k) = M_k ,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n . \tag{2}$$

Hierin bezeichnen wie immer im folgenden: $\Psi_k(\psi_k)$ die Drehmassen, $c_{k,k+1}$ die Verdrehsteifigkeiten zweiter Art mit $c_{n,n+1} = 0$, β die Dämpfungsmomentkonstante, M_k die äußeren Momente der Gaskräfte einschließlich der stationären Mittelwerte und Punkte Ableitungen nach der Zeit.

Die Drehmassen Ψ_k sind periodische Funktionen der Drehwinkel ψ_k, und nur für das Schwungrad ist einfach das Massenträgheitsmoment $\Psi_k = J = \text{konst.}$ einzusetzen. In die Gleichgewichtsaussage (2) sind dämpfende Momente durch den geschwindigkeitsproportionalen Ansatz $\beta\,\dot{\vartheta}_k$ aufgenommen, obgleich dieser rechnerisch einfache Ansatz den tatsächlichen Verhältnissen nicht voll gerecht werden kann. Doch findet man nur für diesen Ansatz einige Zahlenangaben in der Literatur, so daß man auf diese Näherung angewiesen ist. —

Beschränkt man sich auf kleine Verdrehwinkel ϑ_k und kleine Verdrehgeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_k$, so kann man (2) linearisieren und erhält mit

$$\bar{\psi}_k = \omega t + \chi_k \tag{3}$$

die Schwingungsgleichungen in der von *F. Kluge*[2] angegebenen ausführlichen Form:

$$\Psi_k(\bar{\psi}_k)\,\ddot{\vartheta}_k + \frac{d\Psi_k}{d\bar{\psi}_k}\omega\,\dot{\vartheta}_k + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2\Psi_k}{d\bar{\psi}_k^2}\vartheta_k + \beta\,\dot{\vartheta}_k - c_{k-1,k}\,\vartheta_{k-1} + (c_{k-1,k} + c_{k,k+1})\,\vartheta_k$$
$$- c_{k,k+1}\,\vartheta_{k+1} = M_k(\bar{\psi}_k) - \frac{\omega^2}{2}\frac{d\Psi_k}{d\bar{\psi}_k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) . \tag{4}$$

Zur Berechnung erzwungener Schwingungen kann man diese Gleichungen durch Fortlassen der linksseitigen zweiten und dritten Summanden jeder Gleichung (4) weiter vereinfachen, wie *R. Grammel* und *W. T. Koiter*[3] gefunden haben. Da hier jedoch die Lösungen der verkürzten Gleichungen aufgesucht werden sollen, liegt ein anderes Problem vor und man kann die Schlußweise von *R. Grammel* und *W. T. Koiter* zunächst nicht übernehmen. Es muß daher vorerst ohne Vernachlässigungen weitergerechnet werden, wobei sich dann aber die *Grammel*sche Näherung als auch hier berechtigt erweisen wird.

Aus den Gleichungen (4) liest man die eingangs erwähnte Tatsache ab, daß auch in dem nur theoretischen Falle einer rotierenden Kurbelwelle ohne Antrieb durch die Gaskräfte ($M_k = 0$) bereits erzwungene Schwingungen auftreten, was durch die periodischen Schwankungen der Drehmassen bedingt ist.

---

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 2, S. 356, Gl. (11).
[2] *F. Kluge*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 137.
[3] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), S. 47 und *W. T. Koiter*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetenschappen, Amsterdam, Ser. B. 54 (1951), S. 464.

Zur Berechnung der Lösungen der durch Fortlassen der Zwangsmomente $M_k(\bar{\varphi}_k) - \frac{\omega^2}{2}\frac{d\Psi_k}{d\bar{\varphi}_k}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ verkürzten Gleichungen (4) ist es zweckmäßig, die Gleichungen durch Einführung neuer Koordinaten zu vereinfachen.

Im weiteren werde vorausgesetzt, daß die Drehmasse des Schwungrades $\Psi_n = J$ sehr groß im Vergleich mit den anderen Drehmassen ist, so daß das Schwungrad keine Drehschwingungen ausführt ($\vartheta_n \equiv 0$) und die zugehörige Schwingungsgleichung mit dem Index n in (4) fortbleiben kann.

b) Beseitigung der Geschwindigkeitsglieder. An Stelle der Verdrehwinkel ϑ_k sollen andere Koordinaten d_k so eingeführt werden, daß die Summanden mit den Verdrehgeschwindigkeiten fortfallen. Zu dem Zweck werden, wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblich, die Transformationen

$$\vartheta_k = d_k\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\dot{\Psi}_k}{\Psi_k} + \frac{\beta}{\Psi_k}\right) dt} = d_k \sqrt{\frac{\Psi_k(\chi_k)}{\Psi_k(t)}}\, e^{-\int_0^t \frac{\beta}{2\Psi_k} dt} \tag{5}$$

in die Gleichungen (4) eingeführt. Dann erhält man für die neuen Koordinaten d_k in denjenigen Fällen einfachere Differentialgleichungen, in denen die Exponentialfaktoren ganz aus den Gleichungen verschwinden. Dies ist streng außer für $\beta = 0$ dann noch der Fall, wenn sämtliche Drehmassen $\Psi_k(\bar{\varphi}_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ gleich sind. In sehr guter Näherung kann man jedoch die Transformationen auch dann verwenden, wenn die $\Psi_k(\bar{\varphi}_k)$ zwar auf Grund der Kurbelversetzungen nicht identisch sind, aber doch gleiche Mittelwerte haben, wie dies bei den Motoren üblicher Bauart der Fall ist. Zerlegt man nämlich mit *R. Grammel* die periodischen Drehmassen in ihren harmonischen Mittelwert und eine periodische Schwankung um diesen Mittelwert von der Größenordnung ε:

$$\frac{1}{\Psi_k} = \frac{1}{\Theta_k}\left(1 + \varepsilon\, \varrho_k(t)\right), \tag{6}$$

so nehmen die in (5) vorkommenden Exponentialfaktoren die Werte

$$e^{-\frac{\beta}{2}\frac{t}{\Theta_k} - \frac{\beta\varepsilon}{2\Theta_k}\int_0^t \varrho_k(t)\, dt} = e^{-\frac{\beta t}{2\Theta_k}} + 0(\beta\varepsilon)$$

an. Da man sich bei der Berechnung erzwungener Schwingungen auf eine Theorie beschränken kann, in welcher nur lineare Potenzen des Parameters ε beibehalten werden, liegt es nahe, auch bei der Berechnung der „freien" Schwingungen in der gleichen Näherung zu bleiben. Wegen der Kleinheit der Dämpfungskonstanten β können dann in guter Näherung auch Glieder der Größenordnung $\beta\varepsilon$ vernachlässigt werden. Um diese Voraussetzung kenntlich zu machen, werde im weiteren $\beta = \bar{\beta}\varepsilon$ geschrieben. Dann sind alle Exponentialfaktoren gleich, sofern sämtliche Drehmassen die gleichen Mittelwerte besitzen, und es gelten an Stelle von (4) die vereinfachten Gleichungen

$$d_k'' + d_k\left[\left(\frac{\dot{\Psi}_k}{2\Psi_k}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon\bar{\beta}}{2\Psi_k}\right)^2\right] - c_{k-1,k}\frac{d_{k-1}}{\sqrt{\Psi_k\Psi_{k-1}}} + (c_{k-1,k} + c_{k,k+1})\frac{d_k}{\Psi_k} - c_{k,k+1}\frac{d_{k+1}}{\sqrt{\Psi_k\Psi_{k+1}}} = 0 \tag{7}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

für $d_k(t)$. Offenbar kann man in (7) der Kleinheit von β wegen die Summanden $(\varepsilon\bar{\beta}/2\Psi_k)^2$ streichen. Auch die Glieder

$$\left(\frac{\dot{\Psi}_k}{2\Psi_k}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}\dot{\varrho}_k^{\,2} + 0(\varepsilon^3)$$

enthalten nur höhere als erste Potenzen des Parameters ε und bleiben daher ebenfalls unberücksichtigt. Man kann also in einer Näherung, die nur lineare Potenzen des Schwankungsparameters beibehält, wie in der Theorie der erzwungenen Schwingungen von vereinfachten Gleichungen ausgehen. Zur Berechnung der Lösungen von (7) ist eine noch weitergehende Vereinfachung durch Übergang auf Hauptkoordinaten zweckmäßig.

c) Einführung von Hauptkoordinaten. Zur Abkürzung der formalen Rechnung bei der Einführung von Hauptschwingungskoordinaten wird das vereinfachte Differentialgleichungssystem (7) in Matrizenform geschrieben:

$$\mathfrak{x}'' + \mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = 0\,. \tag{8}$$

Hierin kommen der Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ und die symmetrische Matrix $\mathfrak{A}$ vor:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{c_{01}}{\sqrt{\Psi_0 \Psi_0}} & \frac{-c_{01}}{\sqrt{\Psi_0 \Psi_1}} & 0 \\ \frac{-c_{01}}{\sqrt{\Psi_0 \Psi_1}} & \frac{c_{01}+c_{12}}{\sqrt{\Psi_1 \Psi_1}} & \frac{-c_{12}}{\sqrt{\Psi_1 \Psi_2}} \\ \hline \end{pmatrix}. \tag{9), (10}$$

Alle Elemente der Matrix $\mathfrak{A}$ seien in *Fourier*reihen mit dem Argument ωt entwickelt und insbesondere die jeweiligen konstanten Anteile, die nullten *Fourier*koeffizienten, abgespalten, so daß die Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_t \tag{11}$$

entsteht, wobei $\mathfrak{A}_0$ nur konstante Elemente enthält und $\mathfrak{A}_t$ nur periodisch von der Zeit abhängige Elemente besitzt. Für die Transformation auf Hauptkoordinaten ist es zweckmäßig, (8) als die *Euler*schen Gleichungen des kinetischen Potentials

$$L = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}' + \frac{1}{2}\,\mathfrak{x}'\,(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_t)\,\mathfrak{x} \tag{12}$$

aufzufassen. In (12) bezeichnet ein Akzent wie üblich den Übergang zur gespiegelten Matrix. Es liegt nahe, in (12) eine Hauptachsentransformation zur Einführung von Hauptschwingungskoordinaten durchzuführen, um das Gleichungssystem (8) hinsichtlich der Funktionen d_k mit konstanten Koeffizienten zu entkoppeln. Für konstante Drehmassen wäre das Gleichungssystem dann völlig entkoppelt und im Falle veränderlicher Drehmassen jedenfalls soweit wie möglich vereinfacht und daher einer weiteren Auswertung leichter zugänglich. Zur Durchführung der Hauptachsentransformation hat man die Eigenschwingungsformen $\mathfrak{x}$ von

$$\mathfrak{x}'' + \mathfrak{A}_0\,\mathfrak{x} = 0 \tag{8,0}$$

aufzusuchen und macht zu dem Zweck den Ansatz für Eigenschwingungen mit der Eigenkreisfrequenz $\varkappa$:

$$\mathfrak{x}'' = -\varkappa^2\,\mathfrak{x}\,. \tag{13}$$

Dann sind die Eigenkreisfrequenzen aus der Frequenzgleichung

$$\det\,|\mathfrak{A}_0 - \varkappa^2\,\mathfrak{E}| = 0$$

zu bestimmen, worin $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Wenn man die Frequenzen bestimmt hat, lassen sich mit dem Ansatz (13) die zugehörigen Schwingungsformen aus (8,0) berechnen. Die so gefundenen n Lösungsvektoren $\mathfrak{x}_k$ seien normiert, so daß gilt

$$\mathfrak{x}_k'\,\mathfrak{x}_l = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = l, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\,, \\ 0 & \text{für} \quad k \neq l, \quad l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\,. \end{cases}$$

Dann kann man mit diesen Eigenvektoren die Transformationsmatrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathfrak{x}_0 & \cdots & \mathfrak{x}_{n-1} \\ | & & | \end{pmatrix} = (a_{ik}) \tag{14}$$

mit den konstanten Elementen a_{ik} zusammenstellen und durch die orthogonale Transformation[1]

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{y} \tag{15}$$

zu den Hauptkoordinaten

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

übergehen. Führt man die Transformation (15) in das kinetische Potential (12) ein, und beachtet $\mathfrak{X}'\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, so erhält man einfacher

$$L = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{y}''\,\mathfrak{y}' + \frac{1}{2}\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{y} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{y}\,, \tag{17}$$

[1] *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben, S. 246, Leipzig 1949.

worin

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_0 \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \varkappa_0^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa_{n-1}^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

die Diagonalmatrix der Eigenkreisfrequenzquadrate und

$$\mathfrak{G} = (g_{kk'}(t)) = \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_t \mathfrak{X} \tag{19}$$

eine symmetrische Matrix mit periodisch von der Zeit abhängigen Elementen $g_{kk'}(t)$ bezeichnet. Da in (17) die ersten beiden quadratischen Formen rein quadratisch geworden sind, ist das zugehörige System *Euler*scher Differentialgleichungen nur noch in den Gliedern mit zeitabhängigen Koeffizienten gekoppelt:

$$y_k'' + \varkappa_k^2 y_k + \sum_{k'=0}^{n-1} g_{kk'}(t)\, y_{k'} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)\,. \tag{20}$$

Da die Funktionen $g_{kk'}$ allgemein periodische Funktionen sind, ist (20) ein entsprechend allgemeines *Hill*sches Differentialgleichungssystem für die Hauptschwingungskoordinaten. Über die Lösungen kann man allgemeingültig zunächst nur sagen, daß sie nach dem *Floquet*schen Theorem[1] periodisch zweiter Art sind und daß sich die allgemeine Lösung, wenn nicht Ausartungen eintreten, aus Partikularlösungen der Form

$$y_k = \sum_{l=0}^{n-1} \left(C_l\, e^{\sqrt{-1}\,\varrho_l\,\omega t}\, \Phi_k(\omega t) + C_{n+l}\, e^{-\sqrt{-1}\,\varrho_l\,\omega t}\, \Phi_{k,\,n+l}(\omega t) \right) \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1) \tag{21}$$

mit den $2\,n$ Integrationskonstanten C_l zusammensetzen. In den Partikularlösungen kommen n Paare charakteristischer Exponenten $\pm \varrho_l$ und periodische Funktionen $\Phi_{kl}(t)$ vor[2], so daß mit der Zeit unbegrenzt anwachsende Lösungen möglich sind, wenn auch nur einer der charakteristischen Exponenten einen nichtverschwindenden Imaginärteil besitzt. Zur Beurteilung des Verhaltens der „freien" Schwingungen muß man daher diese charakteristischen Exponenten kennen. Ihre Berechnung ist zwar grundsätzlich z. B. mit unendlichen Determinanten möglich, doch ist diese Rechnung im allgemeinen weitläufig. Im weiteren wird daher nur ein typisches Beispiel durchgerechnet, bei welchem man auf in anderem Zusammenhang durchgeführte Berechnungen des charakteristischen Exponenten zurückgreifen kann.

3. Die Vierzylinder-Zweitakt-Maschine. Als Beispiel werde eine Vierzylinder-Maschine mit unter sich gleichen Getriebeteilen und mit unendlich großem Schwungrad betrachtet. Dann erfolgen die Drehschwingungen mit vier Freiheitsgraden. Die Torsionssteifigkeiten dieser homogenen Maschine werden mit $c_{k,\,k+1} = c\ (k = 0, 1, 2)$ zwischen den Kurbeln allgemein und mit $c_{3,4} = c/2$ zwischen letzter Kurbel und Schwungrad speziell in die Rechnung aufgenommen. Die Veränderlichkeit der Drehmassen werde vereinfacht für sehr lange Schubstangen berechnet. In dieser sogenannten *Frahm*schen Näherung[3] erhält man allgemein

$$\Psi = R + \frac{R'}{2}\,(1 - \cos 2\,\omega t)\,,$$

wenn R und R' reduzierte Trägheitsmomente bezeichnen, die sich aus den Massen der Kurbel, der Pleuelstange und des Kolbens zusammensetzen. Zur Abkürzung werden noch

$$\Theta = R + \frac{R'}{2}\,, \qquad \varepsilon = \frac{R'/2}{R'/2 + R} = \frac{R'/2}{\Theta} < 1 \tag{22), (23}$$

gesetzt, so daß ε den relativen Anteil der hin- und hergehenden Massen an der ganzen Drehmasse kennzeichnet. Auf Grund einer bei den Vierzylinder-Zweitakt-Maschinen üblichen Bauart sind

[1] Vgl. z. B. *J. Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung *Schubert*, Bd. L, § 55, Leipzig 1905.

[2] Diese Aussage ist in einer Veröffentlichung von *J. O. Fleckenstein*, Comment. Math. Helv. 15 (1943), S. 367 enthalten, kann jedoch dort infolge eines Schreibfehlers nicht herausgelesen werden. Auf S. 373, Zeile 10 von oben muß es heißen:

$$1 + \sum_{s=1}^{n} K_s \frac{(1 + x^2)\,\mathrm{tg}^2\,\pi\,\vartheta_s}{\mathrm{tg}^2\,\pi\,\vartheta_s - x^2} = 0\,,$$

woraus das paarweise Auftreten der charakteristischen Exponenten auch bei allgemeinen Koeffizientenfunktionen in der dortigen Gl. (1) folgt.

[3] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 2, S. 294, Gl. (4).

die Kurbeln um die Winkel $\chi_1 = \pi/2$, $\chi_2 = 3\pi/2$, $\chi_3 = \pi$ gegeneinander versetzt und alle Mittelwerte $\Theta_k = \Theta$ gleich, so daß

$$\frac{1}{\Psi_0} = \frac{1}{\Psi_3} = \frac{1}{\Theta}(1 + \varepsilon \cos 2\,\omega t) + 0(\varepsilon^2)\,, \qquad \frac{1}{\Psi_1} = \frac{1}{\Psi_2} = \frac{1}{\Theta}(1 - \varepsilon \cos 2\,\omega t) + 0(\varepsilon^2) \tag{24}$$

wird, wenn nur lineare Potenzen des Parameters ε berücksichtigt werden. Um die Hauptkoordinaten einzuführen, hat man zunächst die Matrix $\mathfrak{A}$ von (8) aufzuspalten, was in der Näherung (24) auf

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{c}{\Theta}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

und

$$\mathfrak{A}_t = \varepsilon \cos 2\,\omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

führt. Die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}_0$ und damit die Eigenfrequenzen lassen sich leicht und allgemein mit den Frequenzfunktionen von *R. Grammel* angeben.

Nach kurzer Rechnung sind damit die Elemente der Diagonalmatrix durch

$$\varkappa_k^2 = \frac{c}{\Theta}\zeta_k \text{ mit den Zahlenwerten}$$

k	0	1	2	3
ζ_k	0,084	0,81	2,15	3,46

(27)

gegeben und man kann nun aus (8,0) die Eigenvektoren berechnen und die Transformationsmatrix (14) zusammenstellen. Damit ist auch die symmetrische Matrix $\mathfrak{G}$ von (19) zu berechnen, wobei Einzelheiten dieser Rechnung kein Interesse bieten:

$$\mathfrak{G} = -\frac{c}{\Theta}\,\varepsilon \cos 2\,\omega t \begin{pmatrix} 1{,}773 & 0{,}536 & -1{,}980 & 0{,}000 \\ & -0{,}658 & -0{,}737 & -0{,}865 \\ & & 0{,}540 & -0{,}232 \\ \mathfrak{G} = \mathfrak{G}' & & & 0{,}587 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Die Differentialgleichungen in den Hauptkoordinaten (20) haben hier also die spezielle Form

$$\omega^2 \frac{d^2 y_k}{ds^2} + \left(\frac{\varkappa_k}{2}\right)^2 y_k - \varepsilon \cos s \sum_{k'=0}^{3} \frac{c}{4\,\Theta} g_{kk'}\, y_{k'} = 0(\varepsilon^2) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\,, \tag{29}$$

wenn durch

$$s = 2\,\omega t$$

eine dimensionslose Zeitzählung eingeführt wird und die $g_{kk'}$ hier die Zahlwerte der in (28) vorkommenden Matrixelemente bezeichnen. Die Gleichungen (29) entsprechen formal genau den ausführlich untersuchten Stabilitätsgleichungen von *E. Mettler*[1], so daß man alle Ergebnisse in dem hier benötigten Umfang dem Schrifttum entnehmen kann. Insbesondere kann man die Werte der charakteristischen Exponenten zahlenmäßig angeben und kann damit über das Wachstum der Lösungen von (29) entscheiden. Aus diesen Ergebnissen entnimmt man, daß Drehgeschwindigkeiten in der Nähe der Werte

$$\omega_0 = \frac{\varkappa_k + \varkappa_l}{2\,p} \qquad (p > 0 \text{ ganz}) \begin{vmatrix} (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \\ (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \end{vmatrix} \tag{30}$$

zu anwachsenden Lösungen y_k der Gleichungen (29) führen. Bei diesen Werten ω_0 hat man also zu prüfen, ob die Verdrehwinkel

$$\vartheta_k = d_k \sqrt{\frac{\Psi_k(\chi_k)}{\Psi_k(t)}}\, e^{-\frac{\overline{\beta}\,\varepsilon}{2\,\Theta} t}$$

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 426.

endlich bleiben oder nicht. Zu dem Zweck ist die Transformation (15)

$$d_k = \sum_{i=0}^{3} a_{ki}\, y_i$$

in (5) mit den Funktionen (21) einzusetzen, wobei zu beachten ist, daß in (29) die Zeitzählung $s = 2\,\omega t$ verwendet wurde:

$$\vartheta_k = \sqrt{\frac{\overline{\Psi_k(\chi_k)}}{\Psi_k(t)}}\, e^{-\frac{\bar\beta\,\varepsilon}{2\,\Theta}t} \sum_{i=0}^{3} a_{ki}\left(\sum_{l=0}^{3} C_l\, e^{\sqrt{-1}\,\varrho_l\,2\,\omega t}\,\Phi_{il}(t) + C_{4+l}\, e^{-\sqrt{-1}\,\varrho_l\,2\,\omega t}\,\Phi_{i,\,4+l}(t)\right).$$

Falls nun auch nur ein charakteristischer Exponent ϱ_l einen Imaginärteil von einem solchen Betrage hat, daß die Ungleichung

$$|Im\,\varrho_l| - \frac{\bar\beta\,\varepsilon}{4\,\Theta\,\omega} > 0 \tag{31}$$

erfüllt ist, treten unbegrenzt anwachsende Schwingungen ein. Derartige „Resonanzen" der freien Schwingungen sind gemäß (30) bei den kritischen Drehgeschwindigkeiten

$$\omega_0 = \frac{\varkappa_k}{p} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad (p > 0 \text{ ganz}) \tag{30,1}$$

und zusätzlich bei den nach Art der Schwebungsfrequenzen gebildeten

$$\omega_0 = \frac{\varkappa_k + \varkappa_l}{2\,p} \qquad \begin{matrix}(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\end{matrix} \qquad (k \neq l,\ p > 0 \text{ ganz}) \tag{30,2}$$

möglich. Allerdings haben nur die zu $p = 1$ gehörenden Werte Bedeutung, da für größere Ordnungszahlen p der $|Im\,\varrho_l|$ schnell kleiner wird und in der verwendeten Näherung $0(\varepsilon^2)$ überhaupt für alle Werte $p > 1$ verschwindet.

Mit den Werten (30,1) braucht man sich nicht weiter zu befassen, da die gleichen Werte in bezug auf erzwungene Schwingungen kritisch sind und daher bekannt und ausführlich untersucht sind. Hingegen sind die Drehgeschwindigkeiten (30,2) in der Theorie der erzwungenen Schwingungen ganz ohne Bedeutung und daher bisher nicht beachtet worden.

Im weiteren werden daher nur kritische Drehgeschwindigkeiten in der Nähe von $\omega_0 = \frac{1}{2}(\varkappa_k + \varkappa_l)$ daraufhin untersucht, ob diese Werte auch bei Vorhandensein der Dämpfung noch zu gefährlich anwachsenden Schwingungen führen. Diese Frage kann durch Auswertung der Ungleichung (31) dahingehend beantwortet werden, daß man diejenigen Werte der kritischen Drehgeschwindigkeiten ω_G angibt, welche selbst gerade noch zu anwachsenden Schwingungen führen und nur kritische Werte einschließen. Zu dem Zweck kann man auf in anderem Zusammenhang von *G. Grammel*[1] gefundene Ergebnisse zurückgreifen, welche eine allgemeine formelmäßige Auswertung in dem hier benötigten Umfang gestatten. Mit den Konstanten $g_{kk'}$ von (28), den Mittelwerten Θ aus (22), dem Parameter ε von (23) und den Zahlen ζ_k von (27) erhält man für kritische Drehgeschwindigkeiten in der Nähe von

$$\omega_0 = \frac{\varkappa_k + \varkappa_l}{2} \qquad \begin{matrix}(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\end{matrix} \quad (k \neq l)$$

die Grenzwerte

$$\omega_G = \omega_0\left(1 \pm \varepsilon \sqrt{\frac{g_{kl}^2}{4\,(\sqrt{\zeta_k} + \sqrt{\zeta_l})^2\,\sqrt{\zeta_k\,\zeta_l}} - \frac{\bar\beta^2}{4\,\Theta^2\,\omega_0^2}}\right),$$

die einen ganzen Bereich von resonanzkritischen Drehgeschwindigkeiten von der Breite

$$\varepsilon\,\omega_0 \sqrt{\frac{g_{kl}^2}{(\sqrt{\zeta_k} + \sqrt{\zeta_l})^2\,\sqrt{\zeta_k\,\zeta_l}} - \frac{\bar\beta^2}{\Theta^2\,\omega_0^2}} \tag{32}$$

einschließen. Da die Eigenfrequenzen mit wachsenden Ordnungszahlen k und l schnell zunehmen, ist der Bereich, der zu den kleinstmöglichen Indizeswerten $k = 0$, $l = 1$ gehört, gemäß (32) derjenige Bereich, der die größte Frequenzspanne umfaßt und ist damit wohl der gefährlichste. Er soll daher auch zahlenmäßig berechnet werden.

[1] *G. Grammel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 170.

Zu dem Zweck muß man die Dämpfungszahl β von (2) kennen. *H. Holzer*[1] setzt $\beta = \beta_1 \Theta \omega$ und gibt für den Zahlenfaktor β_1 den Wert von etwa 0,04 an. Messungen von *J. L. Mansa*[2] haben diesen Wert gut bestätigt und jedenfalls keine größeren Zahlenwerte ergeben. Mit diesen Angaben lassen sich die Grenzen des Bereiches kritischer Drehzahlen berechnen und in einem Diagramm darstellen (Abb. 1), in dem als Abszisse ω/ω_0 und als Ordinate der Parameter ε von (23) als Maß für die Größe der Drehmassenschwankung aufgetragen ist. Je stärker der Anteil der hin- und hergehenden Massen, d.h. je größer ε ist, um so größer ist der Bereich der kritischen Drehgeschwindigkeiten. Aus Abb. 1 ist weiter zu entnehmen, daß für den angegebenen Dämpfungsbeiwert $\beta_1 = 0{,}04$ kaum ein Einfluß der Dämpfung im Sinne einer Verminderung der Gefährlichkeit der Schwingungen zu erkennen ist. Selbst für einen angenommenen fünffachen Wert $\beta_1 = 0{,}20$ bleibt immer noch ein wesentlicher Bereich von Drehzahlen kritisch. Allerdings muß dann der Parameter ε mindestens den „Schwellwert" $\varepsilon_0 = 0{,}23$ annehmen, um zu gefährlichen Schwingungen zu führen. Der Schwankungseinfluß der Drehmassen muß also einen gewissen Mindestwert gegenüber dem zeitlich konstanten Mittelwert erreichen.

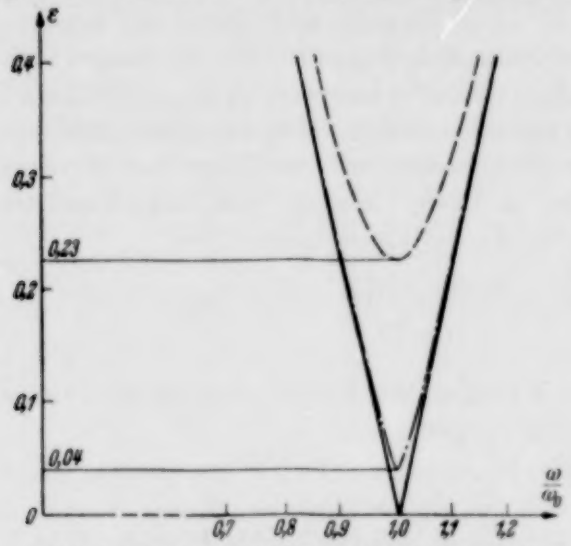


Abb. 1. Bereich kritischer Drehgeschwindigkeiten für $\omega_0 = \frac{1}{2}(\varkappa_0 + \varkappa_1)$. Dämpfungseinfluß: —— : $\beta_1 = 0$; —·—·—: $\beta_1 = 0{,}04$ nach *H. Holzer*; — — —: $\beta_1 = 0{,}2$.

Aus Abb. 2 ist die gegenseitige Lage der einzelnen kritischen Frequenzbereiche höherer Ordnung für $k = 0$, $l = 1$ und $p = 1, 2, 3, 4$ zu erkennen, wobei diese Bereiche allerdings in der zugrundeliegenden Näherung mit nur ersten Potenzen von ε nicht zu berechnen sind. Sie dürften keine praktische Bedeutung haben, da sie nur auf sehr viel langsamer anwachsende

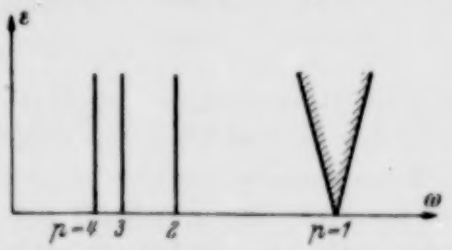


Abb. 2. Lage der Bereiche höherer Ordnung ($p > 1$) für $\omega_0 = \frac{\varkappa_1 + \varkappa^0}{2p}$, $p = 1, 2, 3, 4$.

Schwingungen führen und daher von der Dämpfung vermutlich ganz ausgelöscht werden. Überdies haben sie eine verschwindend kleine Frequenzbreite.

4. Zusammenfassung. Die Berechnung der Drehschwingungen in den Kurbelwellen der Kolbenmotore führt in linearer Näherung für die Verdrehwinkel und Verdrehgeschwindigkeiten auf lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, wenn man den Einfluß der hin- und hergehenden Triebwerkteile mitberücksichtigt. Dieses Differentialgleichungssystem ist inhomogen mit periodischen Störungsfunktionen auf Grund der äußeren Momente der Gaskräfte und als Folge des periodisch mit dem Verdrehwinkel schwankenden Einflusses der Triebwerkmassen. Die Lösung dieses Gleichungssystems setzt sich zusammen aus den erzwungenen Schwingungen als den speziellen Lösungen der vollständigen Gleichungen und den Lösungen der verkürzten Gleichungen, kurz „freie" Schwingungen genannt. Bei der Betrachtung dieser freien Schwingungen an dem Beispiel einer Vierzylinder-Zweitakt-Maschine ergeben sich zusätzliche kritische Drehgeschwindigkeiten $\omega_0 = (\varkappa_k + \varkappa_l)/2 \begin{pmatrix} k = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,2,3 \end{pmatrix}$, auch wenn man den Dämpfungseinfluß mit den Zahlenwerten von *H. Holzer* vereinfacht berücksichtigt. Ob diese neu berechneten kritischen Drehzahlen tatsächlich zu einer gefährlichen Laufunruhe im Betrieb der Maschinen führen, kann wohl nur experimentell beantwortet werden, da man rechnerisch eine nichtlineare Theorie mit Einschluß der Dämpfung heranziehen müßte, was derzeit kaum Aussicht auf Erfolg bietet.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe.
(Eingegangen am 24. September 1954.)
Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr. *F. Weidenhammer*, Karlsruhe i. B., Hertzstr. 16, Bau 40

[1] Vgl. *F. Söchting*, Berechnung mechanischer Schwingungen, S. 226. Wien 1951.
[2] *J. L. Mansa*, Die Berechnung der Dämpfung von Drehschwingungen einer Flugmotorkurbelwelle, Diss. Karlsruhe 1932.

Kreisförmiger Stollen unter Temperaturbeanspruchung.

Von **K. Hirschfeld.**

1. Einleitung. Durch Messungen und Beobachtungen hat man festgestellt, daß im allgemeinen in einer Tiefe von 10 bis 20 m unter der Erdoberfläche das Jahresmittel herrscht, und von da ab nach dem Erdinnern zu die Temperatur ansteigt. Im Durchschnitt nimmt sie auf 100 m Tiefe um 3° C zu, so daß man die geothermische Tiefenstufe, innerhalb der die Vertikalstrecke eine Temperaturzunahme von 1° aufweist, mit etwa 33 m annehmen kann. Dennoch ist es nicht möglich, allgemeingültige Zahlen anzugeben, da die geothermische Tiefenstufe vom geologischen Aufbau der Erdrinde abhängt. In der mittleren Schwäbischen Alb hat man 11 m, in Kanada und Südafrika dagegen 125 m gemessen. Der Grund ist darin zu suchen, daß in alten Schollen, die sich seit langer Zeit orogenetisch und magmatisch in Ruhe befinden, die Temperatur sehr langsam zunimmt, während junge vulkanische Gebiete mit verhältnismäßig hoch emporreichendem Magma einen größeren Temperaturanstieg aufweisen. Durch den Zerfall der radioaktiven Elemente wird der Wärmevorrat ständig ergänzt, so daß man aus dem Gehalt der Gesteine an Uran, Thorium und Kalium auf die entwickelte Wärmemenge schließen kann. Danach ist 1 cm³ Gestein in der Lage, bei

Granit	Balsalt	Peridotit	Sedimenten
40	10	5	10—30

Kalorien im Jahr zu entwickeln. Die Unsicherheit in der Kenntnis der Gesteinszusammensetzung läßt aber über den Verlauf der Temperaturkurve nur Vermutungen zu.

Für die Wärmeberechnung von Stollen, die die vorher betrachteten Tiefen bei weitem nicht erreichen, ist man gezwungen, sich auf Meßergebnisse zu stützen, die an ähnlichen Bauwerken festgestellt worden sind. Eine der bekanntesten Näherungen ist die von *Niethammer* in *Fantolis* Schriften wiedergegebene Gleichung [1], die sich auf Beobachtungen am Sempione-Stollen in den Alpen stützt.

$$\vartheta = 11{,}8 - 0{,}00457\, H_M + 0{,}025\, H_G\,.$$

Darin bedeuten H_M die Höhe über dem Meeresspiegel in m und H_G der Abstand zwischen Stollenachse und Geländeoberfläche in m. Dem Ausdruck liegt außerdem die Annahme zu Grunde, daß die Temperatur des Gesteins in einer größeren Tiefe als 15 m konstant bleibt. Nimmt man z. B. an, daß $H_M = 500$ m und $H_G = 100$ m beträgt, so wird $\vartheta = 12°$ C, oder für $H_M = 1000$ m und $H_G = 200$ m wird $\vartheta = 12{,}2°$ C.

Nach *Hütte* I, 27. Auflage S. 593 ergibt sich die Wärmeübergangszahl für Wasser in geraden Rohrleitungen näherungsweise zu

$$\alpha = 1755\,(1 + 0{,}015\,\vartheta_m)\,\frac{w^{0{,}87}}{d^{0{,}13}}\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,°\text{C}}\right],$$

wobei für ϑ_m der Wert

$$\vartheta_m = 0{,}9\,\vartheta_W + 0{,}1\,\vartheta_R$$

empfohlen wird.

In diesen Ausdrücken sind ϑ_W die Wassertemperatur, ϑ_R die Temperatur der Rohrwandung, w die Geschwindigkeit des Wassers in m/s und d der Durchmesser des Rohres in m.

Wählen wir als mittlere Werte $\vartheta_W = 7°$ C, $\vartheta_R = 12°$ C und damit $\vartheta_m = 7{,}5°$ C, und setzen wir weiter $w = 2$ m/s und den lichten Rohrdurchmesser $d = 3{,}0$ m, so errechnet sich die Wärmeübergangszahl zu

$$\alpha \approx 3100\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,°\text{C}}\right].$$

Dieser hohe Wert der Wärmeübergangszahl liegt fast ausnahmslos in der Wassergeschwindigkeit begründet. Der Stollendurchmesser hat demgegenüber, wie aus Tabelle 1 deutlich hervorgeht, nur geringen Einfluß.

---

[1] Vgl. auch *W. Gröbner*, L'Energia Elettrica (1939) Band 16 S. 595.

Tabelle 1. *Wärmeübergangszahlen α_0 für $\vartheta_m = 7{,}5\ ^\circ C$.*

d \ w	1	2	4	6	8	10
1	1952	3568	6522	9280	11'919	14 474
2	1784	3261	5960	8480	10 892	13 227
3	1693	3094	5654	8045	10 333	12 547
5	1584	2895	5290	7528	9 669	11 741

Zur Bestimmung der Wassertemperaturen ist man meist auf Messungen an Anlagen, die sich in der Nähe des geplanten Stollens befinden, angewiesen. *Fantoli* setzt auf Grund fünfjähriger Beobachtungen im Alpengebiet Liro a Prestone die Temperatur des abfließenden Wassers im Stollen als Funktion in ° C ein und bekommt

$$\vartheta(t) = 7 + 4{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{t-3}{3}\right) = 7 - 4{,}5 \cos\frac{\pi}{6}\,t\,,$$

worin t die Zeit in Monaten bedeutet und $t = 0$ mit dem 15. Januar zusammenfällt.

In Abb. 1 ist die Funktion $\vartheta(t)$ für den Zeitraum eines Jahres aufgetragen. Verschiebt man die Abszissenachse so, daß ein gleich großer positiver und negativer Schwingungsausschlag entsteht, so deckt sich die Kurve mit einer Kosinusschwingung und berechtigt daher zu dem in der nachstehenden Rechnung gewählten Lösungsansatz.

Das den Stollen durchfließende Wasser wird dem Fels eine gewisse Anzahl Kalorien ent-

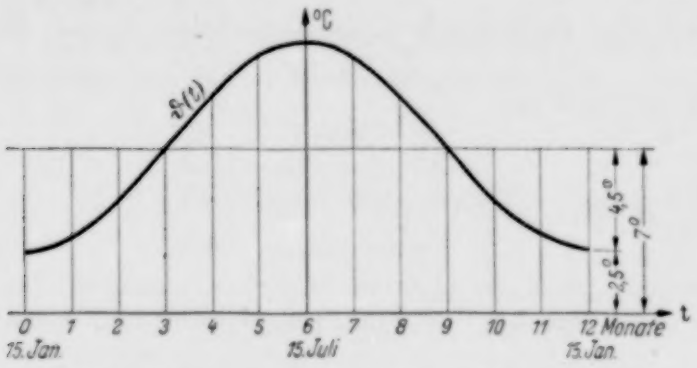


Abb. 1. Wassertemperaturen $\vartheta(t)$ über ein Jahr aufgetragen.

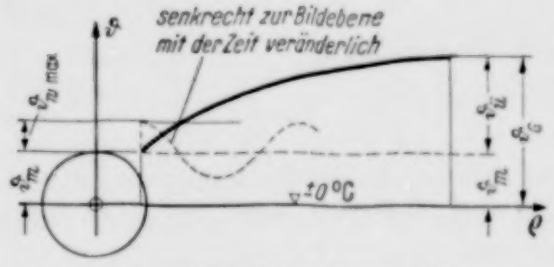


Abb. 2. Aufbau der Temperatur-Belastung.

ziehen und mit zu Tal fördern. Demzufolge ergibt sich in der Umgebung des Stollens eine Volumenverminderung der Felsmasse, was eine Vergrößerung des Stollenradius nach sich zieht. Da der Fels aber in Wirklichkeit schichtig und unstetig ist, treten die thermischen Ausdehnungen ungleichmäßig auf. Darauf Rücksicht zu nehmen, würde aber große Schwierigkeiten in die Rechnung hineintragen, so daß entgegen der Wirklichkeit hier näherungsweise völlige Isotropie und Homogenität vorausgesetzt wird und daher die Gesetze der Elastizitätstheorie zugrundegelegt werden können. Diese Annahme kann man um so mehr verantworten, als dadurch keine nennenswerten Fehler entstehen.

2. Ermittlung der Temperaturverteilung. Um klarere Verhältnisse für die Rechnung zu gewinnen, wird das Problem so aufgespalten, daß erstens der Temperaturverlauf aus dem Unterschied zwischen der konstanten Gebirgs- und mittleren Wassertemperatur und zweitens der Anteil der periodisch schwankenden Wassertemperatur untersucht wird (Abb. 2). Beide Ergebnisse sind dann zum Schluß zu überlagern.

Der Druckstollen kann als eine kreiszylindrische Durchbohrung des Gesteins mit dem Halbmesser r_i angesehen werden. Ist $\vartheta(x, y, z, t,)$ die Felstemperatur im Punkt x, y, z zur Zeit t unter der Voraussetzung, daß die eine Achse mit der des Stollens zusammenfällt, so genügt diese Funktion ϑ der Wärmegleichung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right).$$

Für den gesamten Außenraum des Stollens ist die Temperaturleitfähigkeit

$$a = \frac{\lambda}{c\,\gamma}\,,$$

wobei c die spezifische Wärme, γ das Raumgewicht und λ die Wärmeleitfähigkeit des Gesteins bedeuten. Infolge der Symmetrie des Systems ist die Funktion unabhängig von x und in der y, z-Ebene unabhängig von φ. Es kann daher die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung

für den Fall achsensymmetrischer Belastung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) \tag{1}$$

angesetzt werden, die sich mit $\varrho = r/r_i$ in der dimensionslosen Form

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{a}{r_i^2}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho}\right) \tag{1'}$$

darstellt. Dabei erstreckt sich der Gültigkeitsbereich der Funktion $\vartheta(\varrho, t)$ auf das Feld $r_i < \varrho < +\infty$ und $0 < t < +\infty$. Der Einfluß der periodischen Schwankung der Wassertemperatur auf das Temperaturfeld wird bei einer Kreisfrequenz ω dieser Schwankung erfaßt durch den Lösungsansatz

$$\vartheta(\varrho, t) = B\left[G_{01}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\cos(\omega t - \varphi) + G_{02}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\sin(\omega t - \varphi)\right], \tag{2}$$

woraus sich das Temperaturgefälle

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} = -B\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\left[G_{11}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\cos(\omega t - \varphi) + G_{12}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\sin(\omega t - \varphi)\right] \tag{3}$$

bestimmen läßt. In diesen Ausdrücken bezeichnet $G_p(z)$ die *Gray*sche Zylinderfunktion, die mit der *Hankel*schen Zylinderfunktion

$$H_p^{(1)}(z) = I_p(z) + i\,N_p(z)$$

durch die Gleichung

$$G_p(z) = \frac{i\,\pi}{2}H_p^{(1)}(z)$$

verknüpft ist. In der Rechnung sind die Funktionen $G_{01}(r)$, $G_{02}(r)$, $G_{11}(r)$ und $G_{12}(r)$ verwandt worden. Dabei weist der erste Index auf die Ordnung, der zweite auf den Real- oder Imaginärteil hin. Somit bedeutet

$$G_0\left(r\sqrt{i}\right) = G_{01}(r) + i\,G_{02}(r)$$

die *Gray*sche Funktion nullter Ordnung mit dem komplexen Argument $r\sqrt{i}$,

$$G_1\left(r\sqrt{i}\right) = G_{11}(r) + i\,G_{12}(r)$$

die *Gray*sche Funktion erster Ordnung vom gleichen Argument. Mit $G_{11}^*(r)$ und $G_{12}^*(r)$ sind abkürzend die negativen Ableitungen der Funktionen $G_{01}(r)$ bzw. $G_{02}(r)$ bezeichnet, die sich als Linearkombinationen der *Gray*schen Zylinderfunktionen dritter Art $G_{11}(r)$ und $G_{12}(r)$ darstellen lassen

$$G_{11}^*(r) = \frac{G_{11}(r) - G_{12}(r)}{\sqrt{2}} = -\frac{dG_{01}(r)}{dr}, \qquad G_{12}^*(r) = \frac{G_{11}(r) + G_{12}(r)}{\sqrt{2}} = -\frac{dG_{02}(r)}{dr}$$

und aus Tafeln [1] entnommen werden können.

Aus der Wärmeübergangsbedingung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda}(\vartheta - \vartheta_W) \tag{4}$$

bzw.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} = \frac{r_i\,\alpha}{\lambda}(\vartheta - \vartheta_W), \tag{4'}$$

in der ϑ die Temperatur des Gebirges und ϑ_W die des Wassers im Stollen darstellt, folgt mit $\varrho = \varrho_i$ und $\vartheta_W = \vartheta_{W\,max}\cos\omega t$

$$\left[-B\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\,G_{11}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right) - B\,\frac{r_i\,\alpha}{\lambda}G_{01}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right) + \frac{r_i\,\alpha}{\lambda}\,\vartheta_{W\,max}\cos\varphi\right]\cos(\omega t - \varphi)$$
$$+\left[-B\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\,G_{12}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right) - B\,\frac{r_i\,\alpha}{\lambda}G_{02}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right) - \frac{r_i\,\alpha}{\lambda}\,\vartheta_{W\,max}\sin\varphi\right]\sin(\omega t - \varphi) = 0, \tag{5}$$

[1] *F. Tölke*, *Bessel*sche und *Hankel*sche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung, Stuttgart 1936.

woraus sich dann

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\,G_{12}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{r_i\alpha}{\lambda}G_{02}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\,G_{11}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{r_i\alpha}{\lambda}G_{01}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)} \tag{6}$$

und

$$B = -\frac{-\frac{r_i\alpha}{\lambda}\vartheta_{W\,max}\sin\varphi}{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\,G_{12}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{r_i\alpha}{\lambda}G_{02}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)} \tag{7}$$

errechnen. Damit ist das gesuchte Temperaturfeld

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{W\,max}} = -\frac{\left[G_{01}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\cos(\omega t-\varphi)+G_{02}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\sin(\omega t-\varphi)\right]\sin\varphi}{G_{02}\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{\lambda}{r_i\alpha}\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\,G_{12}^*\left(\varrho_i\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)} \tag{8}$$

gefunden.

An dem Beispiele eines Stollendurchmessers von 3,0 m soll nun das entstehende Temperaturfeld erläutert werden. Hierbei mögen betragen

die Wärmeleitzahl	$\lambda = 3{,}0$	[kcal/m h °C]
die spezifische Wärme	$c = 0{,}20$	[kcal/kg °C]
die Wärmeübergangszahl	$\alpha = 3100$	[kcal/m² h °C]
die Kreisfrequenz	$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365\cdot 24} = 0{,}7173\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{h}^{-1}]$.	

Die Hilfsgrößen ergeben sich zu

$$\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}} = 0{,}5389\,,\quad \frac{r_i\alpha}{\lambda} = 1550\,,\quad \frac{\lambda}{r_i\alpha} = 6{,}452\cdot 10^{-4}\,,$$

$$G_{01}\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right) = 0{,}7881\,,\quad G_{02}\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right) = 0{,}6584\,,\quad G_{11}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right) = 1{,}6630\,,\quad G_{12}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right) = 0{,}3399\,,$$

$$\varphi = 2{,}4459\,,\quad \sin\varphi = 0{,}64093\,,\quad \cos\varphi = -0{,}76760\,.$$

Die weitere Rechnung wird tabellarisch durchgeführt und liefert im Endergebnis die bezogenen Temperaturen von Tabelle 2.

Tabelle 2. *Temperaturen* $\vartheta(t,a)/\vartheta_{W\,max}$.

t \ ϱ	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	30,0
0	+0,9995	+0,8491	+0,7364	+0,6345	+0,5456	+0,4682	+0,3142	+0,2022	—0,0006	—0,0107	$+0{,}0^5\,0418$
1 (7)	+0,8658	+0,7722	+0,6996	+0,6295	+0,5653	+0,5066	+0,3808	+0,2795	+0,0529	—0,0113	$-0{,}0^5\,127$
2 (8)	+0,5000	+0,4886	+0,4754	+0,4560	+0,4334	+0,4093	+0,3453	+0,2819	+0,0925	—0,0088	$-0{,}0^5\,260$
3 (9)	+0,0003	+0,0739	+0,1237	+0,1601	+0,1855	+0,2033	+0,2174	+0,2211	+0,1070	—0,0039	$-0{,}0^5\,324$
4 (10)	—0,4995	—0,3605	—0,2610	—0,1786	—0,1121	—0,0589	+0,0312	+0,0797	+0,0930	+0,0019	$-0{,}0^5\,303$
5 (11)	—0,8656	—0,6983	—0,5759	—0,4695	—0,3797	—0,3043	—0,1637	—0,0707	$+0{,}0^5\,540$	+0,0040	$-0{,}0^5\,199$
6 (12)	—0,9995	—0,8491	—0,7364	—0,6345	—0,5456	—0,4682	—0,3142	—0,2022	+0,0006	+0,0107	$-0{,}0^5\,0418$

Da für die ganzmonatigen Zeiten $t = 0$ bis $t = 5$ und $t = 6$ bis $t = 12$ Monate $\cos(\omega t-\varphi)$ und $\sin(\omega t-\varphi)$ nur ihr Vorzeichen ändern, so gilt

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{W\,max}}\right)_{t=0} = -\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{W\,max}}\right)_{t=6};\qquad \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{W\,max}}\right)_{t=1} = -\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{W\,max}}\right)_{t=7}\ \text{usw.}$$

In Abb. 3 sind diese Werte so aufgetragen, daß über der Abszisse ϱ jede Kurve den Temperaturverlauf im Gestein während eines bestimmten Monats anzeigt; die Abb. 4 ist dagegen so angelegt, daß die Abszisse die Zeitangabe trägt, und die Kurven je einem besonderen Kreisschnitt ϱ angehören. Die Kurve für $\varrho = 1$ ist mit der jahreszeitlichen Temperaturschwingung identisch.

3. Ermittlung der Temperaturspannungen [1]. Das vorliegende Problem stellt, wie auch das der Temperaturermittlung, eine unendliche Scheibe mit kreiszylindrischer Öffnung dar. Die Scheibe unterliegt keinen Belastungen, sondern ist lediglich entsprechend der Temperaturverteilung einem

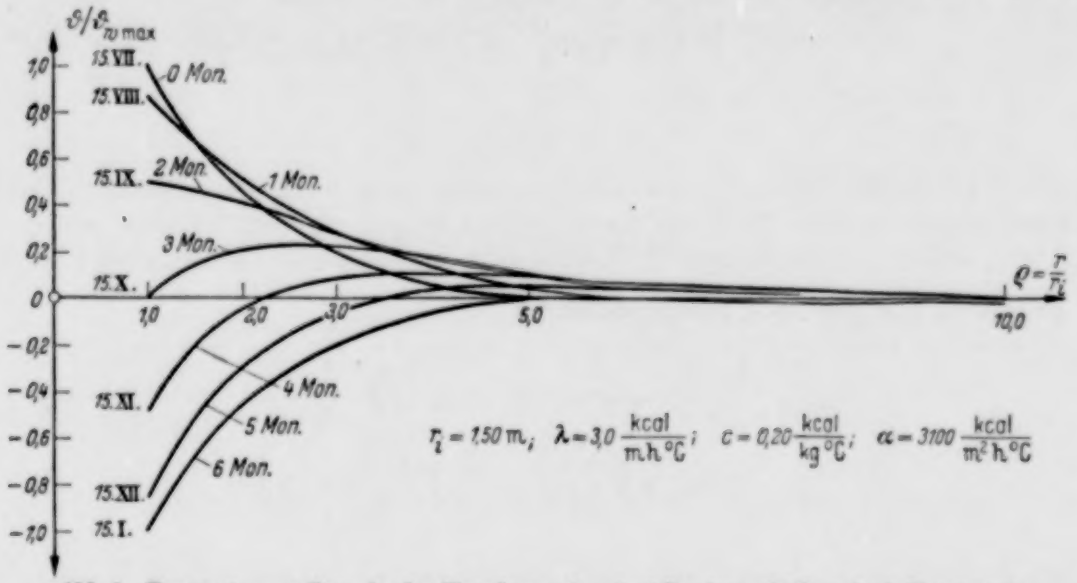


Abb. 3. Temperaturverteilung in der Umgebung eines kreisförmigen Stollens (t als Parameter).

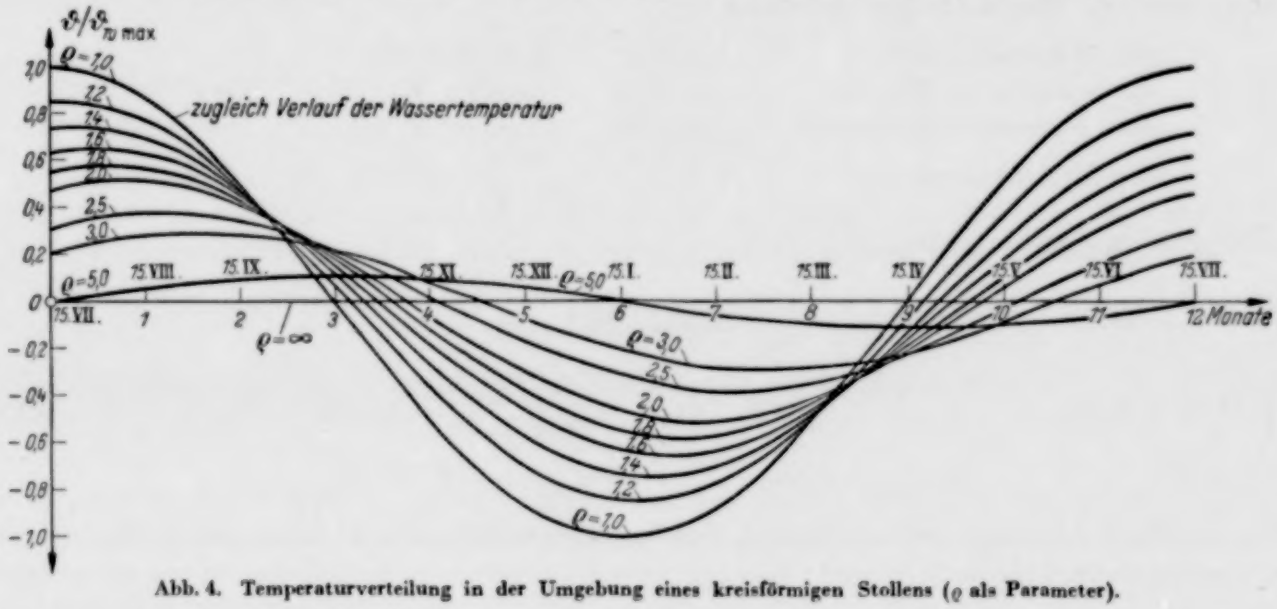


Abb. 4. Temperaturverteilung in der Umgebung eines kreisförmigen Stollens (ϱ als Parameter).

achsensymmetrischen Spannungszustand ausgesetzt. Denkt man sich durch je zwei benachbarte Radial- und Zylinderschnitte ein Element aus der Scheibe herausgelöst (Abb. 5), so wirken darauf eine Radialspannung σ_r und eine Tangentialspannung σ_t. Schubspannungen sind infolge der achsensymmetrischen Wärmedehnung nicht möglich. Somit sind die Normalspannungen σ_r und σ_t gleichzeitig die Hauptspannungen.

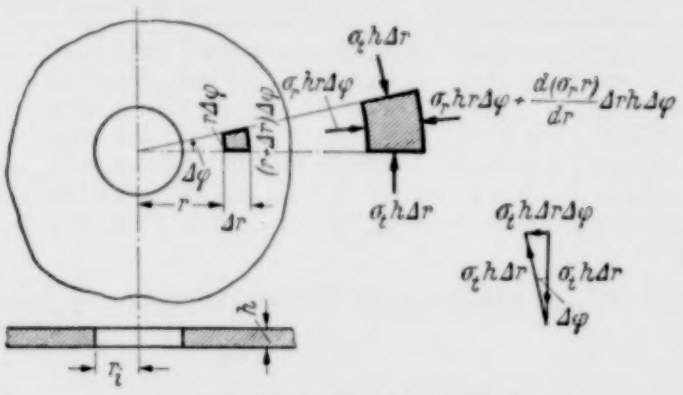


Abb. 5. Schnittelement einer Scheibe.

Die auf das Sektorelement wirkenden Kräfte verlaufen sämtlich radial, da sich die beiden Tangentialkräfte auch zu einer radial gerichteten Resultierenden zusammensetzen lassen. Demzufolge lautet die auf die Radialrichtung bezogene Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d(r\,\sigma_r)}{dr}\,h\,\Delta r\,\Delta\varphi - \sigma_t\,h\,\Delta r\,\Delta\varphi = 0$$

oder nach Division durch $h\,\Delta r\,\Delta\varphi$ die wohlbekannte Gleichung

$$\sigma_t = \frac{d(r\,\sigma_r)}{dr}$$

[1] Die Anregung zu dieser Rechnung verdanke ich Herrn *F. Tölke*.

oder in dimensionsloser Form mit $\varrho = \frac{r}{r_i}$

$$\sigma_t = \frac{d(\varrho\,\sigma_r)}{d\varrho}\,. \tag{9}$$

Sind ε_r und ε_t die Dehnungen der Scheibe in radialer und tangentialer Richtung und ε_ϑ die Temperaturdehnungen, so gelten mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnung μ nach dem erweiterten *Hooke*schen Gesetz die Beziehungen

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}\,(\sigma_r - \mu\,\sigma_t)\,, \qquad \varepsilon_t - \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}\,(\sigma_t - \mu\,\sigma_r)\,. \tag{10}$$

Drückt man weiter ε_r und ε_t durch die Radialverschiebung u aus, so folgt in bekannter Weise

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}\,, \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r}\,, \tag{11}$$

oder nach Einführung von (11) in (10)

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_\vartheta + \frac{1}{E}\,(\sigma_r - \mu\,\sigma_t)\,, \qquad \frac{u}{r} = \varepsilon_\vartheta + \frac{1}{E}\,(\sigma_t - \mu\,\sigma_r)\,. \tag{12}$$

Mit (9) und (12) liegt ein vollständiges System simultaner Differentialgleichungen vor, aus denen sich die drei Unbekannten u, σ_r und σ_t gewinnen lassen. Wird die zweite der Gleichungen (12) mit r multipliziert und differentiiert, so folgt

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_\vartheta + r\,\frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} + \frac{1}{E}\left[\sigma_t + r\,\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu\,\frac{d(r\,\sigma_r)}{dr}\right]. \tag{13}$$

Andererseits liefert die erste Gleichung (12) in Verbindung mit (9)

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_\vartheta + \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\,\frac{d(r\,\sigma_r)}{dr}\right]. \tag{14}$$

Wird (14) von (13) subtrahiert, so ergibt sich

$$0 = r\,\frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} + \frac{1}{E}\left(\sigma_t + r\,\frac{d\sigma_t}{dr} - \sigma_r\right)$$

oder in dimensionsloser Form

$$0 = \frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varrho} + \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_t}{\varrho} + \frac{d\sigma_t}{d\varrho} - \frac{\sigma_r}{\varrho}\right). \tag{15}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit E und setzt σ_t aus (9) ein, so wird

$$\frac{d^2(\varrho\,\sigma_r)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d(\varrho\,\sigma_r)}{d\varrho} - \frac{\varrho\,\sigma_r}{\varrho^2} + \frac{d(E\,\varepsilon_\vartheta)}{d\varrho} = 0\,. \tag{16}$$

Die homogene Lösung ist mit

$$(\varrho\,\sigma_r)_h = C_1\,\varrho + \frac{C_2}{\varrho} \tag{17}$$

bekannt; die Störungsfunktion dieser inhomogenen Differentialgleichung wird zunächst analytisch in der Form

$$E\,\varepsilon_\vartheta = E\,\alpha\,\vartheta = n\,\vartheta \qquad \text{mit} \quad n = E\,\alpha_\vartheta \tag{18}$$

angegeben, wobei E den mittleren Elastizitätsmodul des Gesteins und α_ϑ den thermischen Ausdehnungskoeffizienten bezeichnen. Für Beton beträgt z.B. $E \sim 2 \cdot 10^5$ [kg/cm²] und $\alpha_\vartheta = 10^{-5}$, so daß sich dafür der Wert $n = 2$ errechnet. Die Temperaturfunktion ϑ ist dabei durch (2) dargestellt. Führt man ihren Differentialquotienten (3) in (16) mit (18) ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2(\varrho\,\sigma_r)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d(\varrho\,\sigma_r)}{d\varrho} - \frac{\varrho\,\sigma_r}{\varrho^2} = E\,\alpha_\vartheta\,B\,\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\left[G_{11}^*\left(\varrho\,\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\cos(\omega\,t - \varphi)\right.$$
$$\left. + G_{12}^*\left(\varrho\,\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\sin(\omega\,t - \varphi)\right]. \tag{19}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat, wie man durch Einsetzen nachprüft, die Form

$$\varrho\,\sigma_r = C_1\,\varrho + \frac{C_2}{\varrho} + \frac{E\,\alpha_\vartheta\,B}{\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}}\left[G_{11}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\sin(\omega t-\varphi) - G_{12}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\cos(\omega t-\varphi)\right]. \qquad (20)$$

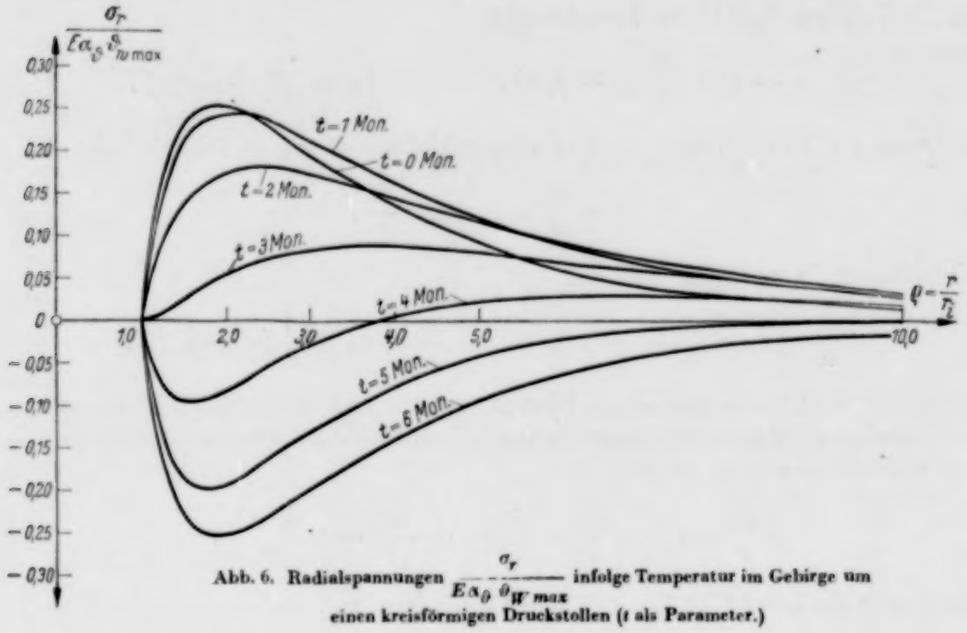


Abb. 6. Radialspannungen $\frac{\sigma_r}{E\,\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}}$ infolge Temperatur im Gebirge um einen kreisförmigen Druckstollen (t als Parameter.)

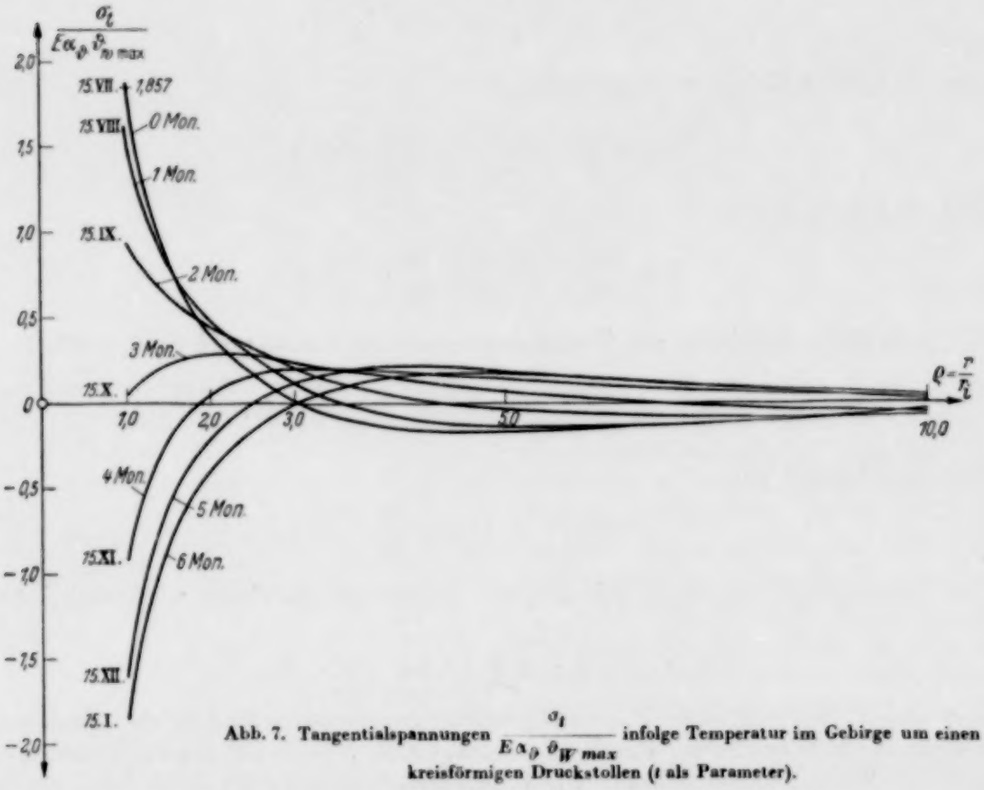


Abb. 7. Tangentialspannungen $\frac{\sigma_t}{E\,\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}}$ infolge Temperatur im Gebirge um einen kreisförmigen Druckstollen (t als Parameter).

Im folgenden sind nun aus den Randbedingungen die Integrationskonstanten zu bestimmen. Für den Innenrand $\varrho = 1$ muß $\sigma_r = 0$ sein. Damit geht (20) über in

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{E\,\alpha_\vartheta\,B}{\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}}\left[G_{11}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\sin(\omega t-\varphi) - G_{12}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}}\right)\cos(\omega t-\varphi)\right].$$

Aus der Bedingung, daß für $\varrho = \infty$ der Wert σ_r noch endlich sein muß, folgt

$$C_1 = 0\,. \tag{21}$$

Damit ist aber auch gleichzeitig die zweite Konstante bekannt

$$C_2 = -\frac{E\alpha_\vartheta B}{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}}\left[G_{11}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\sin(\omega t-\varphi) - G_{12}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\cos(\omega t-\varphi)\right]. \tag{22}$$

Diese in die durch ϱ dividierte Gleichung (20) eingesetzt, ergibt die Radialspannung

$$\sigma_r = \frac{E\alpha_\vartheta B}{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}}\left[-\frac{1}{\varrho^2}G_{11}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{1}{\varrho}G_{11}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\right]\sin(\omega t-\varphi)$$

$$+\frac{E\alpha_\vartheta B}{\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}}\left[\frac{1}{\varrho^2}G_{12}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)-\frac{1}{\varrho}G_{12}^*\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\right]\cos(\omega t-\varphi)\,. \tag{23}$$

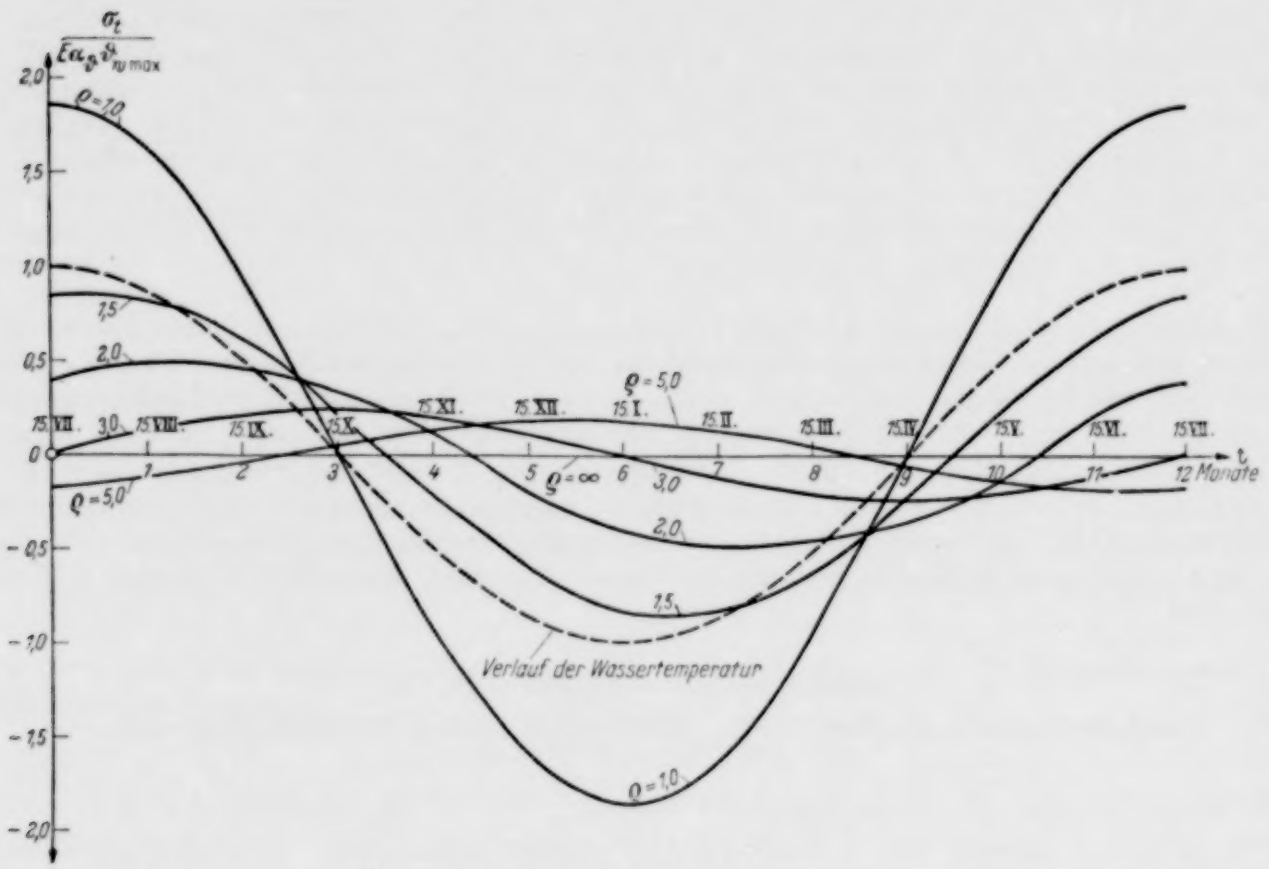


Abb. 8. Tangentialspannungen $\frac{\sigma_t}{E\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}}$ infolge Temperatur im Gebirge um einen kreisförmigen Druckstollen (ϱ als Parameter).

Bildet man von (23) die Ableitung nach ϱ, so ergibt sich gemäß (9) die Tangentialspannung zu

$$\sigma_t = E\alpha_\vartheta B\left[\frac{1}{\varrho^2\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}}G_{11}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)-\frac{1}{2}G_{02}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{1}{2}G_{22}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\right]\sin(\omega t-\varphi)$$

$$-E\alpha_\vartheta B\left[\frac{1}{\varrho^2\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}}G_{12}^*\left(\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)+\frac{1}{2}G_{01}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)-\frac{1}{2}G_{21}\left(\varrho\sqrt{\frac{r_i^2\omega}{a}}\right)\right]\cos(\omega t-\varphi)\,. \tag{24}$$

In den Ausdrücken für σ_r und σ_t ist der Wert (7) von B einzusetzen.

Auch hier empfiehlt es sich, den Spannungsverlauf an einem Beispiele zu erörtern. Unter den gleichen Annahmen wie bei der vorhergehenden Zahlenrechnung erhält man

$$B = 0{,}973291\ \vartheta_{W\,max} \qquad \text{bzw.} \qquad B\Big/\sqrt{\frac{r_i^2\,\omega}{a}} = 1{,}80607\ \vartheta_{W\,max}\,.$$

Den weiteren Rechnungsgang liefert Tabelle 3

Tabelle 3. *Radial- und Tangentialspannungen.*
Erste Zeile $\sigma_r/E\,\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}$, zweite Zeile $\sigma_t/E\,\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}$.

t \ ϱ	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	30,0
0	0	0,141	0,209	0,240	0,251	0,252	0,230	0,198	0,0934	0,0153	0,00153
	1,857	1,321	0,980	0,733	0,547	0,398	0,156	0,00704	—0,174	—0,0485	—0,00300
1 (7)	0	0,125	0,189	0,223	0,239	0,244	0,235	0,213	0,121	0,0278	0,00280
	1,610	1,206	0,948	0,755	0,607	0,487	0,270	0,123	—0,126	—0,0729	—0,00535
2 (8)	0	0,0753	0,119	0,146	0,162	0,171	0,177	0,171	0,116	0,0329	0,00332
	0,931	0,769	0,661	0,576	0,504	0,441	0,312	0,206	—0,0419	—0,0774	—0,00632
3 (9)	0	0,00562	0,0172	0,0299	0,0420	0,0525	0,0719	0,0827	0,0797	0,0291	0,00296
	0,00320	0,125	0,198	0,242	0,267	0,277	0,270	0,234	0,0509	—0,0614	—0,00557
4 (10)	0	—0,0656	—0,0894	—0,0940	—0,0893	—0,0803	—0,0528	—0,0276	+0,0223	+0,0175	+0,00181
	—0,926	—0,552	—0,319	—0,157	—0,042	+0,126	+0,156	+0,199	+0,131	—0,0289	—0,00332
5 (11)	0	—0,119	—0,172	—0,193	—0,197	—0,192	—0,163	—0,131	—0,0410	+0,00125	+0,00014
	—1,606	—1,082	—0,750	—0,514	—0,340	—0,209	+0,000289	+0,111	+0,177	+0,0113	—0,000185
6 (12)	0	—0,141	—0,209	—0,240	—0,251	—0,252	—0,230	—0,198	—0,0934	—0,0153	—0,00153
	—1,857	—1,321	—0,980	—0,733	—0,547	—0,398	—0,156	—0,00704	+0,174	+0,0485	+0,00300

Die Eintragung wurde bis $t = 6$ Monate vorgenommen. Für die eingeklammerten Monate ist zu beachten, daß sich die Vorzeichen der Spannungen umdrehen. Aus den Kurven von Abb. 6 ist zu ersehen, daß die Radialspannungen $\sigma_r/E\,\alpha_\vartheta\,\vartheta_{W\,max}$ vom Stollenrand beginnend sehr schnell zunehmen und bei etwa $\varrho = 1{,}8$ das Maximum des Maximums erreichen, um dann gegen null asymptotisch abzuklingen. Zur Bestimmung der Tangentialspannung dient die Abb.7. Die Größtwerte treten bei $\varrho = 1$ auf und streben sehr schnell der Bezugsgeraden zu. Sehr aufschlußreich ist auch die Darstellung in Abb. 8, in der die Tangentialspannungen für verschiedene Kreisschnitte ϱ als Funktion von t aufgetragen sind. Die gestrichelte Kurve entspricht darin dem Verlauf der Wassertemperatur.

(Eingegangen am 24. September 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *K. Hirschfeld*, Aachen, Technische Hochschule.

Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen.

Von **B. Stückler.**

1. Einleitung. Die in der Dissertation des Verfassers [1] (im folgenden mit I bezeichnet) aufgestellten Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens gelten nur für den Fall, daß alle Räder auf der Fahrebene rollen, ohne dabei zu gleiten. Das ist jedoch nur möglich, wenn hinreichend große Haftreibungskräfte auftreten. Dieses ist aber leider oft nicht der Fall, und dann wird es besonders gefährlich, wenn das Fahrzeug auch noch ins Schleudern gerät. An die sich hieraus ergebenden Probleme ist man bisher vorwiegend experimentell herangegangen. Theoretische Betrachtungen hielten sich in mehr oder weniger engem Rahmen und dienten mehr dazu, sich die beobachteten Vorgänge verständlich zu machen, als eine brauchbare Theorie aufzubauen. Zur Verkleinerung dieser Lücke möchte die vorliegende Arbeit beitragen. Und zwar wird auf theoretischem Wege ermittelt, in welcher Weise die an den in I betrachteten Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen von beliebigen eingeprägten Kräften und den Massenbeschleunigungen abhängen.

An sich bestehen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, um diese Aufgabe zu lösen. Man könnte beispielsweise elementar mit Hilfe des Schwerpunktsatzes und des allgemeinen Momentensatzes vorgehen. Diese würden aber bei einer Anwendung auf das ganze Fahrzeug nur drei Gleichungen ergeben, in denen die gesuchten Haftreibungen vorkämen. Demgegenüber treten an jedem Rad i. a. zwei Reibungskomponenten auf, so daß bei vier Rädern acht Kräfte zu bestimmen sind. Infolgedessen müßten die genannten Sätze auch noch auf Teile des Fahrzeuges angewandt werden. Dadurch kämen zwangsläufig innere Reaktionskräfte in die Rechnung hinein, die aber wieder eliminiert werden müßten. Im ganzen gesehen ein jedenfalls sehr mühseliges und umständliches Verfahren.

Besser wäre es schon, die *Lagrange*schen Gleichungen zu benutzen [2]. Aber auch dann wäre ein umfangreiches Gleichungssystem zu lösen, und außerdem würde man die Ergebnisse in einer sehr unübersichtlichen Form erhalten.

Diese Nachteile führten zur Entwicklung des in Ziff. **2** angegebenen Verfahrens. Durch eine naheliegende Ergänzung der sog. *Lagrange-Euler*schen Gleichungen [3] lassen sich die gesuchten Reaktionskräfte ohne Eliminations-Prozeß bestimmen, und zwar in einer bedeutend übersichtlicheren Form als bei Benutzung der *Lagrange*schen Gleichungen. Daher wird sich dieses Verfahren vor allem dann mit Vorteil anwenden lassen, wenn es sich um Systeme mit einer größeren Zahl von Freiheitsgraden und Bedingungen — holonomen oder nichtholonomen — handelt.

2. Erweiterung des *Lagrange-Euler*schen Gleichungssystems. Diese Gleichungen gehen aus dem *Lagrange*schen Prinzip

$$\delta A_e \equiv \int d\bar{K}_e \, \delta\bar{r} \leq \int \bar{b} \, \delta\bar{r} \, dm \tag{1}$$

hervor. Darin bedeutet δA_e die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte, $d\bar{K}_e$ die Summe der an einem Massenelement dm wirkenden eingeprägten Kräfte, $\bar{b}$ die Beschleunigung und $\delta\bar{r}$ eine virtuelle Verschiebung eines dm. Nun gehören die betrachteten Fahrzeuge zu den Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden. Für diese ist jeder Vektor $\bar{r}$ von einem festen Bezugspunkt zu einem dm des Systems eine Funktion der *Lagrange*schen Koordinaten

$$\bar{r} = \bar{r}\,(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,,$$

so daß für die virtuellen Verschiebungen

$$\delta\bar{r} = \sum_\nu \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \tag{2}$$

gilt. Bestehen nun kinematische Bedingungen von der Form

$$\sum_\nu b_{\mu\nu} \dot{q}_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m < n)\,, \tag{3}$$

[1] *B. Stückler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 337.
[2] Siehe z. B. *G. Hamel*, Theoretische Mechanik, S. 464, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949.
[3] Siehe *G. Hamel*, a. a. O. S. 480.

so daß auch

$$\sum_{\nu} b_{\mu\nu}\,\delta q_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

gilt, so werden neue Geschwindigkeitsgrößen ω_μ und virtuelle Verschiebungen δs_μ eingeführt durch

$$\omega_\mu = \sum_{\nu} b_{\mu\nu}\,\dot{q}_\nu \begin{cases} = 0 & \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, m, \\ \neq 0 & \text{für } \mu = m+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{5}$$

$$\delta s_\mu = \sum_{\nu} b_{\mu\nu}\,\delta q_\nu \begin{cases} = 0 & \text{für } \mu = 1, \ldots, m, \\ \neq 0 & \text{für } \mu = m+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{6}$$

wobei aber vorläufig noch nicht beachtet werden darf, daß diese Größen für $\mu = 1, \ldots, m$ gleich Null sind. Es wird also gewissermaßen zunächst der allgemeinere Fall betrachtet, daß das System noch nicht den Bedingungen (3) unterliegt. Die ω_μ sollen voneinander unabhängig sein, so daß es eindeutige Auflösungsformeln

$$\dot{q}_\nu = \sum_{\mu} B_{\nu\mu}\,\omega_\mu, \tag{7}$$

$$\delta q_\nu = \sum_{\mu} B_{\nu\mu}\,\delta s_\mu \tag{8}$$

gibt. Damit bekommt man für $\delta\bar{r}$ nach (2)

$$\delta\bar{r} = \sum_{\mu=1}^{n} \bar{a}_\mu\,\delta s_\mu, \quad \bar{a}_\mu \equiv \sum_{\nu} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\nu}\,B_{\nu\mu}. \tag{9}$$

Mit diesen Beziehungen liefert [1] das *Lagrange*-Prinzip (1)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{n}\left[K_\mu - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho;\tau}\beta_{\mu\varrho\tau}\,P_\varrho\,\omega_\tau\right)\right]\delta s_\mu = 0 \\ &\text{mit} \\ &T = T(q_\nu, \omega_\mu) \text{ als kinetische Energie,} \\ &K_\mu \equiv \int d\bar{K}_e\,\bar{a}_\mu, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) \equiv \sum_{\nu}\frac{\partial T}{\partial q_\nu}\,B_{\nu\mu}, \quad P_\varrho \equiv \frac{\partial T}{\partial \omega_\varrho}, \\ &\beta_{\mu\varrho\tau} \equiv \sum_{\nu;\sigma}\frac{\partial b_{\varrho\nu}}{\partial q_\sigma}\,(B_{\sigma\tau}\,B_{\nu\mu} - B_{\nu\tau}\,B_{\sigma\mu}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Daraus ergeben sich bei Bestehen der Bedingungen $\delta s_\mu = 0$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ die *Lagrange-Euler*schen Gleichungen

$$K_\mu = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho;\tau}\beta_{\mu\varrho\tau}\,P_\varrho\,\omega_\tau \qquad (\mu = m+1, \ldots, n). \tag{11}$$

Um nun auch noch die Reaktionskräfte zu ermitteln, die bei Bedingungen $\omega_\mu = 0$ auftreten, wird dieses Gleichungssystem in folgender Weise erweitert. Jede Bedingung (6) wird mit einem zunächst unbekannten Faktor multipliziert:

$$\lambda_\mu\,\delta s_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{12}$$

Dann kann an Stelle von (10) geschrieben werden

$$\sum_{\mu=1}^{n}\left[K_\mu + \lambda_\mu - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho;\tau}\beta_{\mu\varrho\tau}\,P_\varrho\,\omega_\tau\right)\right]\delta s_\mu = 0. \tag{13}$$

Jetzt wird behauptet, daß alle δs_μ als frei angesehen werden dürfen, so daß neben (11) noch gilt

$$\lambda_\mu = -K_\mu + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho,\tau}\beta_{\mu\varrho\tau}\,P_\varrho\,\omega_\tau, \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Der Beweis ist hier besonders einfach; denn (14) kann einfach als Definition der λ_μ angesehen werden. Damit ist jedoch noch nichts gewonnen. Denn aus dieser zunächst rein mathematischen Definition

[1] Siehe *G. Hamel*, a. a. O. S. 473 ff.

der λ_μ geht in keiner Weise hervor, ob diese Größen auch eine physikalische Bedeutung haben. Zur Klärung dieser Frage wird auf das *Newton*sche Grundgesetz

$$d\bar{K}_e + d\bar{K}_R = \bar{b}\, dm \tag{15}$$

zurückgegriffen, worin $d\bar{K}_R$ die Summe der am dm wirkenden Reaktionskräfte bedeutet. Multipliziert man dieses skalar mit einem beliebigen Vektor, der zum Unterschied zu den virtuellen Verschiebungen mit $\mathfrak{d}\bar{r}$ bezeichnet werde, und summiert über das ganze System, so tritt an Stelle von (1)

$$\int d\bar{K}_e\, \mathfrak{d}\bar{r} + \int d\bar{K}_R\, \mathfrak{d}\bar{r} = \int b\, \mathfrak{d}\bar{r}\, dm\,. \tag{16}$$

Wird nun speziell in Analogie zu (9)

$$\mathfrak{d}\bar{r} = \sum_{\mu=1}^{m} \bar{a}_\mu\, \mathfrak{d}s_\mu + \sum_{\mu=m+1}^{n} \bar{a}_\mu\, \delta s_\mu \tag{17}$$

gewählt, so liefert (16) offensichtlich als Ergänzung von (10)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{m}\left[K_\mu + \int d\bar{K}_R\, \bar{a}_\mu - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho;\tau} \beta_{\mu\varrho\tau}\, P_\varrho\, \omega_\tau\right)\right] \mathfrak{d}s_\mu \\ &+ \sum_{\mu=m+1}^{n}\left[K_\mu - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} - \left(\frac{\partial T}{\partial s_\mu}\right) + \sum_{\varrho,\tau} \beta_{\mu\varrho\tau}\, P_\varrho\, \omega_\tau\right)\right] \delta s_\mu = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Hierin sind aber im Gegensatz zu (10) alle Verschiebungen frei; folglich muß jede eckige Klammer Null ergeben. Damit ist zunächst bewiesen, daß für die durch (14) rein formal eingeführten λ_μ gilt

$$\lambda_\mu \equiv \int d\bar{K}_R\, \bar{a}_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)\,. \tag{19}$$

Hierin treten an sich sämtliche am System wirkende Reaktionskräfte auf. Man braucht aber jetzt nur noch an die *Hamel*sche Definition der Reaktionskräfte [1] zu denken, um die Frage nach der physikalischen Bedeutung der λ_μ in erschöpfender Weise beantworten zu können. Nach dieser ist eine Kraft dann eine Reaktionskraft, wenn ihr einziges Merkmal [2] — das soll heißen, das einzige, wodurch man auf das Vorhandensein der betreffenden Kraft schließen kann — eine Bewegungseinschränkung ist. Nun ist das einzige Merkmal der Reaktionsgröße λ_μ gemäß ihrer Einführung (12) $\delta s_\mu = 0$, was gleichbedeutend mit $\omega_\mu = 0$ ist. Infolgedessen kann sich λ_μ nur aus solchen Reaktionskräften zusammensetzen, die $\omega_\mu = 0$ halten. Ferner läßt sich aus dem Vorzeichen von λ_μ etwas über die Richtung der betreffenden Reaktionskräfte aussagen; denn $\lambda_\mu\, \mathfrak{d}s_\mu$ ist die Arbeit der Reaktionskräfte bei einer gedachten Verschiebung $\mathfrak{d}s_\mu$. Diese muß also bei $\mathfrak{d}s_\mu > 0$ positiv sein, wenn $\lambda_\mu > 0$, dagegen negativ, wenn $\lambda_\mu < 0$ ist.

3. Anwendung auf rollende Fahrzeuge. In dieser Arbeit beschränkt sich die Anwendung auf die in I betrachteten Fahrzeuge, für die $\lambda \equiv b'/l = 0$ ist [3], während der allgemeine Fall $\lambda \neq 0$ in einer späteren Arbeit behandelt werden soll.

Als erstes sind geeignete Verschiebungen zu wählen. Da es naheliegt, die an jedem Rade wirkende Haftreibung in eine Komponente tangential und in eine normal zur Bahn des Rades zu zerlegen, wird man zweckmäßigerweise auch Verschiebungen in diesen Richtungen wählen. In Abb. 1 bedeuten $\mathfrak{d}s_1$ bzw. $\mathfrak{d}s_2$ Verschiebungen von B bzw. B_1 in Richtung der Vorder- bzw. Hinterradachse und $\mathfrak{d}s_3$ bis $\mathfrak{d}s_6$ Verschiebungen der Berührungspunkte der Räder tangential zu deren Bahnen. Dabei sollen die Pfeile angeben, in welchen Richtungen die Verschiebungen positiv gezählt werden. Als virtuelle Verschiebungen werden die schon in I benutzten Größen δs und $\delta\chi$ gewählt, und es wird

$$\delta s_7 \equiv \delta s\,, \qquad \delta s_8 \equiv \delta\chi \tag{20}$$

gesetzt. Entsprechendes gelte für die Geschwindigkeitsgrößen ω_μ, für die ja nach (5) und (6) die gleichen Koeffizienten maßgebend sein sollen wie für die δs_μ. Diese $b_{\mu\nu}$ sind nun zu bestimmen. In Abb. 2 sei $\bar{v}_B$ die Geschwindigkeit von B bei einer beliebigen Bewegung des Fahrzeuges auf der Fahrebene. Dieser Vektor ist in verschiedene Komponenten zerlegt:

a) in ω_1 und ω_7, also in Richtung der Vorderradachse und senkrecht dazu,
b) in v_1' und v_1, das soll heißen, in Richtung der Hinterradachse und senkrecht dazu,
c) in $\dot{x}$ und $\dot{y}$.

[1] Siehe *G. Hamel*, a. a. O. S. 517.
[2] Zum Merkmal-Begriff s. *G. Hamel*, a. a. O. S. 510 u. S. 43.
[3] I, S. 338.

Für diese Komponenten gilt

$$\omega_1 = -\sin\vartheta\ \dot{x} + \cos\vartheta\ \dot{y}\,, \qquad \omega_7 = \cos\vartheta\ \dot{x} + \sin\vartheta\ \dot{y}\,, \tag{21}$$

$$v_1' = -\sin\vartheta_1\,\dot{x} + \cos\vartheta_1\,\dot{y}\,, \qquad v_1 = \cos\vartheta_1\,\dot{x} + \sin\vartheta_1\,\dot{y}\,. \tag{22}$$

Andrerseits ist $v_1' = \omega_2 + l\,\dot{\vartheta}_1$, da die Relativbewegung von B gegenüber B_1 nur eine Drehung um B_1 mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}_1$ sein kann. Daraus folgt

$$\omega_2 = -\sin\vartheta_1\,\dot{x} + \cos\vartheta_1\,\dot{y} - l\,\dot{\vartheta}_1\,. \tag{23}$$

Schließlich ergibt sich aus I (9)

$$\left.\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_7 - c\,\dot{\vartheta} - r\,\dot{\varphi}\,, & \omega_5 &= v_1 - a\,\dot{\vartheta}_1 - r_1\dot{\varphi}_1\,,\\ \omega_4 &= \omega_7 + c\,\dot{\vartheta} - r\,\dot{\varphi}_2\,, & \omega_6 &= v_1 + b\,\dot{\vartheta}_1 - r_1\dot{\varphi}_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Wird nun für die benutzten wahren Koordinaten die Reihenfolge

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = \vartheta_1,\ q_4 = \chi,\ q_5 = \varphi,\ q_6 = \varphi_2,\ q_7 = \varphi_1,\ q_8 = \varphi_3 \tag{25}$$

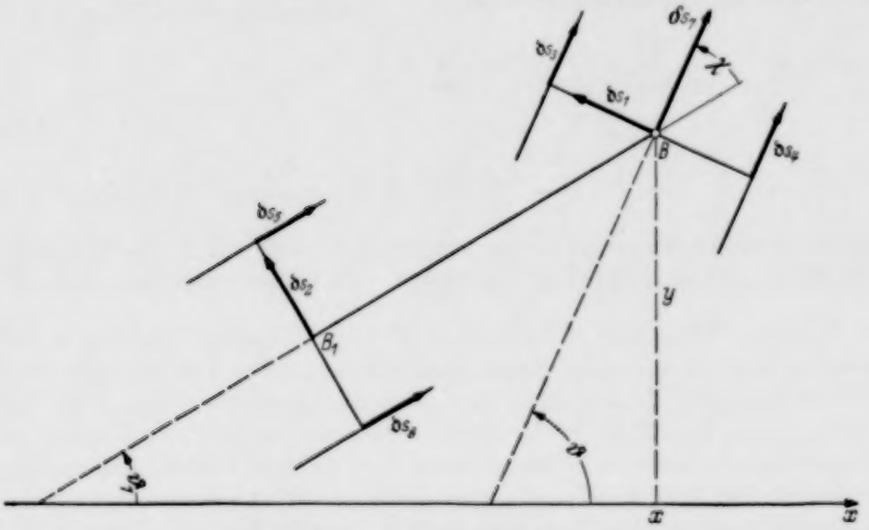


Abb. 1. Die gewählten Verschiebungen.

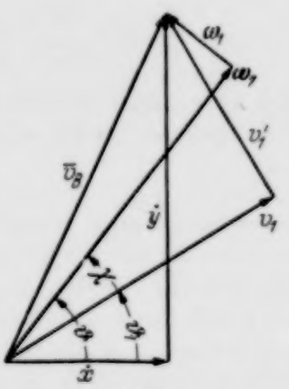


Abb. 2.

gewählt, so führen die Beziehungen (21) bis (24) zu der Koeffizienten-Matrix

$$(b_{\mu\nu}) = \begin{Bmatrix} -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & -c & -c & -r & 0 & 0 & 0\\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & c & c & 0 & -r & 0 & 0\\ \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & -a & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0\\ \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1\\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \tag{26}$$

deren Reziproke lautet

$$(B_{\mu\nu}) = \begin{Bmatrix} -\sin\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\vartheta & 0\\ \cos\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\vartheta & 0\\ \frac{1}{l}\cos\chi & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l}\sin\chi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{c}{rl}\cos\chi & \frac{c}{rl} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r}\left(1-\frac{c}{l}\sin\chi\right) & -\frac{c}{r}\\ \frac{c}{rl}\cos\chi & -\frac{c}{rl} & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{r}\left(1+\frac{c}{l}\sin\chi\right) & \frac{c}{r}\\ -\frac{1}{r_1}\left(\frac{a}{l}\cos\chi+\sin\chi\right) & \frac{a}{r_1 l} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_1} & 0 & \frac{1}{r_1}\left(\cos\chi-\frac{a}{l}\sin\chi\right) & 0\\ \frac{1}{r_1}\left(\frac{b}{l}\cos\chi-\sin\chi\right) & -\frac{b}{r_1 l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_1}\left(\cos\chi+\frac{b}{l}\sin\chi\right) & 0 \end{Bmatrix}. \tag{27}$$

Hiermit werden die $\beta_{\mu\varrho\nu}$ errechnet. Da diese in (14) mit ω_ν zu multiplizieren sind, von denen aber beim reinen Rollen nur $\omega_7 \equiv v$ und $\omega_8 \equiv \dot{\chi} \neq 0$ sind, kommen zur Ermittlung der Reaktionsgrößen nach (14) nur die $\beta_{\mu\varrho 7}$ und $\beta_{\mu\varrho 8}$ in Frage, und zwar für $\mu = 1, \ldots, m = 6$. Die Rechnung ergibt, daß nur folgende Koeffizienten von Null verschieden sind:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_{117} = \frac{1}{l}\cos\chi\,, && \beta_{217} = -\frac{1}{l}\,, && \left.\begin{matrix}\beta_{138}\\ \beta_{148}\\ \beta_{178}\end{matrix}\right\} = 1\,.\\
&\beta_{127} = \frac{1}{l}\,, && \beta_{227} = -\frac{1}{l}\cos\chi\,, && \\
&\left.\begin{matrix}\beta_{137}\\ \beta_{147}\\ \beta_{177}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\sin\chi\,, && \beta_{257} = \frac{1}{l}\sin\chi\,, && \\
& && \beta_{267} = \frac{1}{l}\sin\chi\,, &&
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Als nächstes ist die kinetische Energie T_0 des Fahrzeuges zu bestimmen und daraus die Impulskomponenten P_μ. Bei der Bildung von T_0 darf zwar noch nicht von den Bedingungen $\omega_\mu = 0$ Gebrauch gemacht werden, weil man sonst auch $P_\mu = 0$ bekäme, wohl aber dürfen quadratische Glieder mit zwei verschwindenden ω_μ fortgelassen werden. So tritt jetzt an Stelle von I (25)

$$2\,T_F = m_F v_1^2 + J\,\dot{\vartheta}_1^2 + 2\,m_F\,(s\,v_1 + l_s\,\omega_2)\,\dot{\vartheta}_1 + C_1\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2)\,.$$

Dazu kommen vom Vorderradsystem die Glieder

$$2\,m_R v^2 + 2\,A\,\dot{\vartheta}^2 + C\,(\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}_2^2)\,,$$

wobei hier $2A$ das Hauptträgheitsmoment des ganzen Vorderradsystems um die Lenkachse ist und $2\,m_R$ dessen Masse, deren Schwerpunkt auf der Lenkachse angenommen wird. Da nach Abb. 2 $v_1 = -\sin\chi\,\omega_1 + \cos\chi\,\omega_7$ ist, so bekommt man für das ganze Fahrzeug

$$\left.\begin{aligned}
2\,T_0 = {} & m_F\,(-\sin\chi\,\omega_1 + \cos\chi\,\omega_7)^2 + (J + 2\,A')\,\dot{\vartheta}_1^2 + 2\,\dot{\vartheta}_1\,(-m_F\,s\sin\chi\,\omega_1 + m_F\,l_s\,\omega_2\\
& + m_F\,s\cos\chi\,\omega_7 + 2\,A\,\omega_8) + 2\,m_R\,\omega_7^2 + 2\,A\,\omega_8^2 + C\,(\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}_2^2) + C_1\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Hieraus folgt für $P_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial\,\omega_\mu}\,T(q_\nu, \omega_\mu)$:

$$P_\mu = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\vartheta}_1}\frac{\partial \dot{\vartheta}_1}{\partial \omega_\mu} + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}}\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \omega_\mu} + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}_2}\frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \omega_\mu} + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}_1}\frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \omega_\mu} + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}_3}\frac{\partial \dot{\varphi}_3}{\partial \omega_\mu}\,. \tag{30}$$

Die hier übergangene Rechnung liefert unter Benutzung der Abkürzungen[1] I (21), I (28), I (31) und

$$m_3 = \frac{1}{l^2}\left(J + 2\,A' + \frac{a^2 + b^2}{r_1^2}\,C_1\right) - m_F\,\frac{l_s}{l} \tag{31}$$

die Werte

$$\left.\begin{aligned}
P_1 = {} & \left(m_{F_2}\cos 2\chi + \frac{m_2}{2}\sin 2\chi\right)\omega_7 + \frac{2\,A'}{l}\cos\chi\,\omega_8\,,\\
P_2 = {} & -\left(m_{F_2}\cos\chi + m_3\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{2\,A'}{l}\,\omega_8\,,\\
P_3 = {} & -\frac{C}{r^2}\left[\left(1 - \frac{c}{l}\sin\chi\right)\omega_7 - c\,\omega_8\right],\\
P_4 = {} & -\frac{C}{r^2}\left[\left(1 + \frac{c}{l}\sin\chi\right)\omega_7 + c\,\omega_8\right],\\
P_5 = {} & -\frac{C_1}{r_1^2}\left(\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right)\omega_7\,,\\
P_6 = {} & -\frac{C_1}{r_1^2}\left(\cos\chi + \frac{b}{l}\sin\chi\right)\omega_7\,,\\
P_7 = {} & \left(m_1 + m_{F_2}\sin 2\chi + m_2\sin^2\chi\right)\omega_7 + \frac{2A'}{l}\sin\chi\,\omega_8\,.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

[1] In I (21) muß es $A' = A + \dfrac{c^2}{r^2}\,C$ heißen.

Da leicht einzusehen ist, daß für $\mu = 1, \ldots, 7$ $(\partial T/\partial s_\mu) = 0$ ist, so liefert (14) nach Einsetzen von (28) zunächst

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= -K_1 + \left\{\dot{P}_1 + \frac{1}{l}\left[\cos\chi\, P_1 + P_2 + \sin\chi\,(P_3 + P_4 + P_7)\right]\omega_7 + (P_3 + P_4 + P_7)\,\omega_8\right\},\\
\lambda_2 &= -K_2 + \left\{\dot{P}_2 - \frac{1}{l}\left[P_1 + \cos\chi\, P_2 - (P_5 + P_6)\sin\chi\right]\omega_7\right\},\\
\lambda_3 &= -K_3 + \dot{P}_3,\\
\lambda_4 &= -K_4 + \dot{P}_4,\\
\lambda_5 &= -K_5 + \dot{P}_5,\\
\lambda_6 &= -K_6 + \dot{P}_6.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Interessant ist die Bedeutung der eckigen Klammern in λ_1 und λ_2. Für diese erhält man nach kurzer Rechnung

$$\cos\chi\, P_1 + P_2 + (P_3 + P_4 + P_7)\sin\chi = m\,\frac{l_s^*}{l}\sin\chi\, v\,, \tag{34}$$

$$P_1 + \cos\chi\, P_2 - (P_5 + P_6)\sin\chi = -m\left[\left(1 - \frac{l_s^*}{l}\right)\cos\chi + \frac{s^*}{l}\sin\chi\right]\sin\chi\, v\,, \tag{35}$$

worin l_s^* und s^* die Koordinaten des Schwerpunktes des ganzen Fahrzeuges sind (Abb. 3). Wie sich aber leicht nachweisen läßt, ist (34) bzw. (35) nichts anderes als die Komponente des Impulses $m\bar{v}_{s^*}$ in ω_2- bzw. ω_1-Richtung.

Nun ist noch zu klären, aus welchen Reaktionskräften sich die λ_μ zusammensetzen. Da nach Ziff. 2 $\lambda_\mu\, \delta s_\mu$ die Arbeit der Reaktionskräfte bei einer Verschiebung δs_μ ist und λ_μ nur solche Reaktionskräfte enthält, die $\omega_\mu = 0$ halten, ergibt sich folgendes.

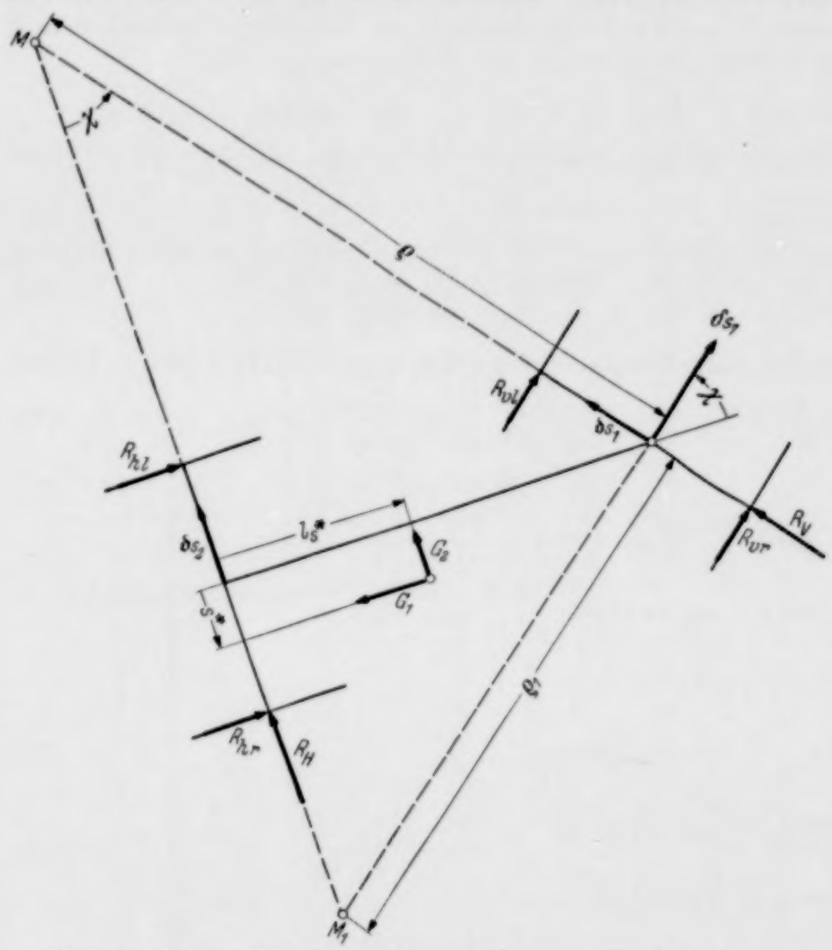


Abb. 3. Bezeichnungen und positive Richtungen der Komponenten der Haftreibungen und des Gewichtes.

Von allen am Fahrzeug wirkenden Reaktionskräften können nur die von der Fahrebene auf die Vorderräder ausgeübten Reibungskräfte ein seitliches Gleiten dieser Räder verhindern. Also tragen nur diese Kräfte zu $\omega_1 = 0$ bei. Da aber von diesen bei einer Verschiebung δs_1 nur die Komponenten senkrecht zu den Rädern Arbeit leisten, ist λ_1 gleich deren Summe, die mit R_V bezeichnet wird. Entsprechend ist λ_2 die Summe der Komponenten der an den Hinterrädern angreifenden Reibungskräfte senkrecht zu den Rädern, für die R_H gesetzt wird. Daraus ersieht man, daß die Theorie der Systeme starrer Körper nichts über die Größe der genannten Komponenten im Einzelnen aussagen kann. Dagegen sind die übrigen λ_μ nur Einzelkräfte, denn wenn z. B. nur $\delta s_3 \neq 0$ gewählt wird, was einer Drehung des linken Vorderrades um dessen Achse entspricht, so leistet nur die an diesem Rade wirkende Reibung Arbeit, und zwar nur deren Komponente R_{vl} in

Radrichtung (Abb. 3). Entsprechendes gilt für λ_4 bis λ_6, so daß man schließlich aus (32) und (33) für die genannten Reaktionskräfte erhält

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 \equiv R_V &= -K_1 + \left(m_{F_2}\cos 2\chi + \frac{m_2}{2}\sin 2\chi\right)\dot v + m\,\frac{l_s^*}{l^2}\sin\chi\, v^2 \\
&\quad + \frac{2A'}{l}\cos\chi\,\ddot\chi + \left(m + m_2 + \frac{2C_1}{r_1^2} - m_{F_2}\sin 2\chi - m_2\sin^2\chi\right) v\,\dot\chi, \\
\lambda_2 \equiv R_H &= -K_2 - (m_{F_2}\cos\chi + m_3\sin\chi)\,\dot v + \frac{m}{l}\left[\left(1 - \frac{l_s^*}{l}\right)\cos\chi + \frac{s^*}{l}\sin\chi\right]\sin\chi\, v^2 \\
&\quad - \frac{2A'}{l}\,\ddot\chi - (m_3\cos\chi - m_{F_2}\sin\chi)\, v\,\dot\chi, \\
\lambda_3 \equiv R_{vl} &= -K_3 - \frac{C}{r^2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{c}{l}\sin\chi\right) v - c\,\dot\chi\right], \\
\lambda_4 \equiv R_{vr} &= -K_4 - \frac{C}{r^2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(1 + \frac{c}{l}\sin\chi\right) v + c\,\dot\chi\right], \\
\lambda_5 \equiv R_{hl} &= -K_5 - \frac{C_1}{r_1^2}\,\frac{d}{dt}\left(\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right) v, \\
\lambda_6 \equiv R_{hr} &= -K_6 - \frac{C_1}{r_1^2}\,\frac{d}{dt}\left(\cos\chi + \frac{b}{l}\sin\chi\right) v.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Zu diesem System gehören für $\mu = 7{,}8$ die Bewegungsgleichungen I (78) und I (79).

4. Die Komponenten K_μ der wichtigsten eingeprägten Kräfte. a) Schwerkraft. Diese liefert nur dann einen Beitrag zu den K_μ, wenn der durch den Schwerpunkt des Fahrzeuges gehende resultierende Schwerkraftvektor Komponenten senkrecht zur Normale der Fahrebene hat. Diese seien mit G_1 und G_2 bezeichnet (Abb. 3). Die zugehörigen K_μ ergeben sich aus der Arbeit dieser Kräfte gemäß

$$\mathfrak{d}A_e = \sum_{\mu=1}^{m=6} K_\mu\,\mathfrak{d}s_\mu + \sum_{\mu=m+1}^{n=8} K_\mu\,\delta s_\mu\,. \tag{37}$$

Zunächst wird nur $\mathfrak{d}s_1 \neq 0$ gewählt, was einer Drehung des ganzen Fahrzeuges um M_1 entspricht, und zwar um den Winkel

$$\mathfrak{d}\vartheta_1 = \frac{1}{\varrho_1}\,\mathfrak{d}s_1 = \frac{1}{l}\cos\chi\,\mathfrak{d}s_1\,. \tag{38}$$

Dann läßt sich an Hand der Abb. 3 leicht nachweisen, daß dabei von der Schwerkraft die Arbeit

$$\mathfrak{d}A_e = [G_2\,l_s^* + G_1\,(\varrho_1\sin\chi - s^*)]\,\mathfrak{d}\vartheta_1 \tag{39}$$

geleistet wird, woraus sich nach (38) die erste der in (40) zusammengefaßten Beziehungen ergibt. K_2 bekommt man, indem nur $\mathfrak{d}s_2 \neq 0$ gewählt wird, was nur durch Drehung des ganzen Fahrzeuges um B möglich ist. Und schließlich leistet die Schwerkraft noch Arbeit bei einer Verschiebung δs_7, also bei einer Drehung um M. Die Ergebnisse lauten

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \left(G_2\,\frac{l_s^*}{l} - G_1\,\frac{s^*}{l}\right)\cos\chi + G_1\sin\chi\,, \\
K_2 &= G_2\left(1 - \frac{l_s^*}{l}\right) + G_1\,\frac{s^*}{l}\,, \\
K_7 &= \left(G_2\,\frac{l_s^*}{l} - G_1\,\frac{s^*}{l}\right)\sin\chi - G_1\cos\chi\,.
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

b) Luftwiderstand. Aus I, Abb. 4, ist ersichtlich, daß in (40) nur $P_l\cos\alpha$ statt G_1, $P_l\sin\alpha$ statt G_2, 0 statt l_s^* und e statt s^* zu setzen ist, um zu erhalten

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= P_l\cos\alpha\left(\sin\chi - \frac{e}{l}\cos\chi\right), \\
K_2 &= P_l\left(\sin\alpha + \frac{e}{l}\cos\alpha\right), \\
K_7 &= -P_l\cos\alpha\left(\cos\chi + \frac{e}{l}\sin\chi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

c) **Momente um die Radachsen, wie Antriebsmomente, Bremsmomente, Momente der Rollreibung.** Für diese gilt zunächst

$$\mathfrak{d}A_e = M_{vl}\,\mathfrak{d}\varphi + M_{vr}\,\mathfrak{d}\varphi_2 + M_{hl}\,\mathfrak{d}\varphi_1 + M_{hr}\,\mathfrak{d}\varphi_3 . \tag{42}$$

Hieraus bekommt man durch Umrechnung auf die $\mathfrak{d}s_\mu$ mit Hilfe der Matrix (27)

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \left[\frac{c}{rl}(M_{vr}-M_{vl}) + \frac{1}{r_1 l}(bM_{hr}-aM_{hl})\right]\cos\chi - \frac{1}{r_1}(M_{hr}+M_{hl})\sin\chi ,\\
K_2 &= -\left[\frac{c}{rl}(M_{vr}-M_{vl}) + \frac{1}{r_1 l}(bM_{hr}-aM_{hl})\right],\\
K_3 &= -\frac{M_{vl}}{r}, \quad K_4 = -\frac{M_{vr}}{r}, \quad K_5 = -\frac{M_{hl}}{r_1}, \quad K_6 = -\frac{M_{hr}}{r_1},\\
K_7 &= \frac{1}{r}(M_{vr}+M_{vl}) + \frac{1}{r_1}(M_{hr}+M_{hl})\cos\chi + \left[\frac{c}{rl}(M_{vr}-M_{vl}) + \frac{1}{r_1 l}(bM_{hr}-aM_{hl})\right]\sin\chi ,\\
K_8 &= \frac{c}{r}(M_{vr}-M_{vl}) .
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

5. Über den Einfluß der Schwerpunktslage auf die wichtigsten Massenbeschleunigungsglieder von R_V und R_H. Es sind dies die Glieder mit $\dot v$ und v^2 in (36), da normalerweise $\dot\chi$ und $\ddot\chi$ klein sind und in der reinen Geradeausfahrt und der reinen Kreisfahrt ganz verschwinden. Die Glieder mit v^2 lassen sich verhältnismäßig leicht übersehen; sie rühren von der Normalbeschleunigung des Fahrzeuges her, denn nach Abb. 3 ist $(1/l)\sin\chi\, v^2 = v^2/\varrho$, das ist aber die Normalbeschleunigung der Lenkachse. Ihre vektorielle Summe muß nach dem Schwerpunktssatz in der reinen Kreisfahrt mit konstanter Geschwindigkeit gleich $m\,\bar b_{s^*}$ sein, wenn alle $K_\mu = 0$ sind. Komplizierter ist der Aufbau der Koeffizienten von $\dot v$. Für die in ihnen auftretenden Konstanten gilt nach I (28), I (31), I (21) [1] und (31)

$$\left.\begin{aligned}
m_{F2} &= \frac{m\,s^*}{l} + \frac{C_1}{r_1^2}\frac{b-a}{l},\\
m_2 &= \frac{1}{l^2}\left(J + 2A - m_F l^2 + 2C\frac{e^2}{r^2} - \frac{C_1}{r_1^2}(2l^2 - a^2 - b^2)\right),\\
m_3 &= \frac{1}{l^2}\left(J + 2A + 2C\frac{e^2}{r^2} + \frac{C_1}{r_1^2}(a^2+b^2)\right) - m_F\frac{l_s}{l} .
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

In der Praxis sind aber gewöhnlich die Trägheitsmomente der Räder klein gegenüber dem Gesamtträgheitsmoment des Fahrzeuges [2]. Beachtet man ferner, daß nach dem *Steiner*schen Satz

$$J + 2A + 2m_R l^2 = J_{s^*} + m(l_{s^*}^2 + s^{*2}) \tag{45}$$

gilt, so bekommt man näherungsweise für den Fall, daß $s^*/l \ll 1$ ist,

$$m_2 \approx \frac{J_{s^*}}{l^2} - m\left(1 - \frac{l_{s^*}^2}{l^2}\right), \qquad m_3 \approx \frac{J_{s^*}}{l^2} - m\frac{l_{s^*}}{l}\left(1 - \frac{l_{s^*}}{l}\right). \tag{46}$$

Um ein ungefähres Bild der Verhältnisse zu erhalten, wird folgendes Zahlenbeispiel benutzt [2]:

$$m = 130\ \mathrm{kgm^{-1}\,sec^2}, \quad J_{s^*} = 230\ \mathrm{kgmsec^2}, \quad l = 2{,}6\ \mathrm{m}, \quad a = b .$$

Diese Werte ergeben für die Koeffizienten in den genannten Gliedern die Diagramme der Abb. 4 und 5. Zu diesen ist folgendes zu bemerken: In Abb. 4 bzw. 5 sind die Koeffizienten von v^2 bzw. $\dot v$ in Abhängigkeit von χ dargestellt. Als Kurvenparameter ist das Verhältnis l_{s^*}/l gewählt. Wo nicht anderes angegeben, ist $s^* = 0$. Von dieser Schwerpunktskoordinate hängt $(R_V)_v$ überhaupt nicht und $(R_H)_v$ nur in geringem Maße ab, da in der Praxis $s^*/l \ll 1$. Beachtlicher ist jedoch der Einfluß von s^* auf die Glieder mit $\dot v$. Es ist nun besonders im Hinblick auf die Gefahr des Schleuderns wichtig, daß die für das Rollen erforderlichen seitlichen Haftreibungskräfte R_V und R_H möglichst klein bleiben. An sich könnten auftretende Massenbeschleunigungen durch eingeprägte Kräfte wenigstens teilweise kompensiert werden. Z. B. können bekanntlich bei einer reinen Kreisfahrt mit konstanter Geschwindigkeit R_V und $R_H = 0$ sein, wenn die Fahrbahn eine entsprechende Neigung aufweist. Auch innere eingeprägte Kräfte können nach Ziff. 4, c) R_V und R_H verkleinern. Aber i. a

[1] Siehe Fußnote von S. 283.
[2] Vgl. Zahlenbeispiel I, S. 348.

wird es sehr schwierig sein, durch eingeprägte Kräfte den jeweils erforderlichen Ausgleich zu schaffen. Man denke beispielsweise nur daran, daß für den Stadtverkehr die Kurven gewöhnlich nicht überhöht werden können. Daher sollte man auch darauf bedacht sein, die Massenbeschleunigungsglieder so klein wie möglich zu halten oder zumindest eine ungünstige Verteilung auf Vorder- und Hinterräder zu vermeiden. So ersieht man aus Abb. 5, daß im Zahlenbeispiel $(R_H)_v$ nahezu

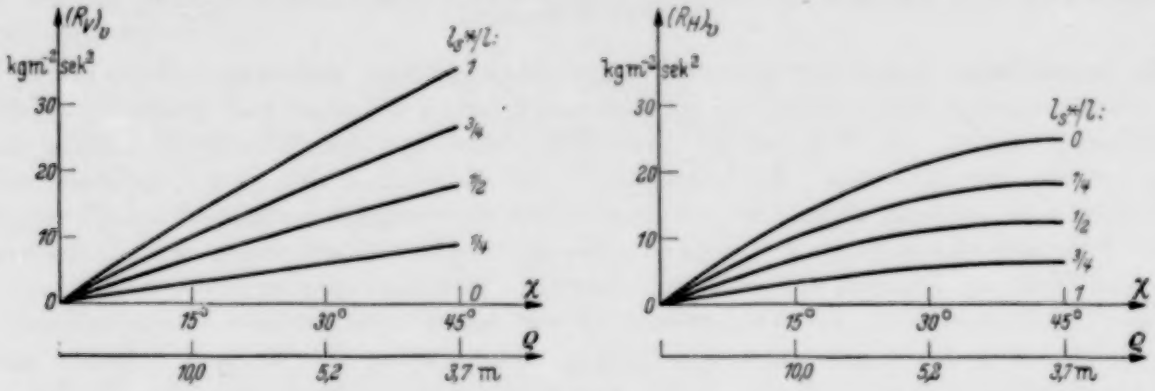


Abb. 4.

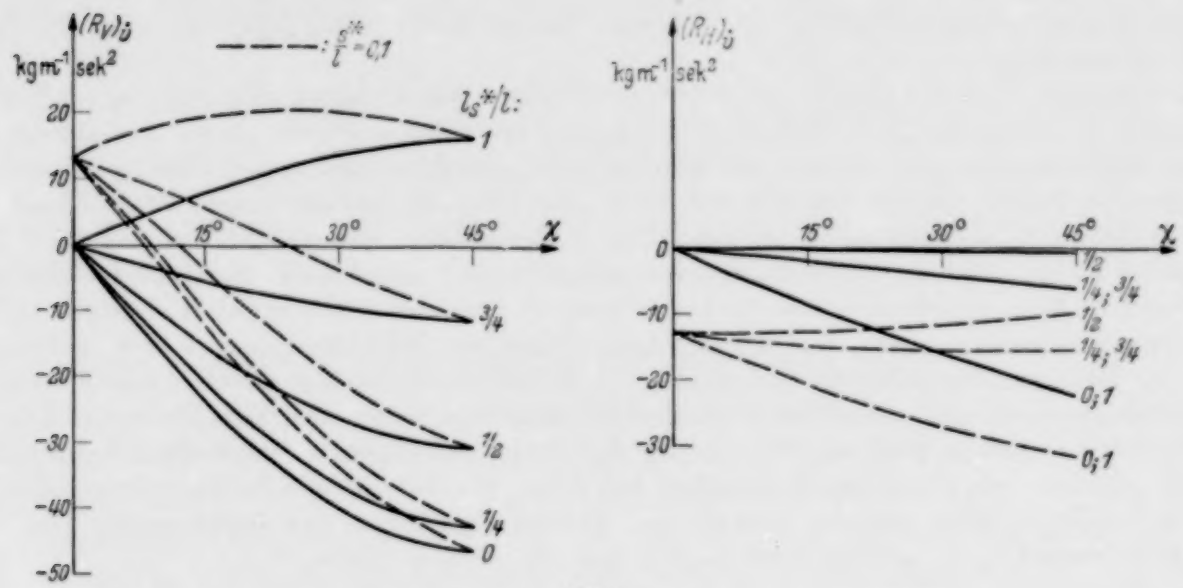


Abb. 5.

verschwindet, wenn $s^* = 0$ und $l_s^*/l = 1/2$. Der letzte Wert ist zwar für $(R_I)_v$ ziemlich ungünstig, es ist aber folgendes zu bedenken: Beim Bremsen wird infolge der Zunahme des von der Fahrbahn auf die Vorderräder ausgeübten Normaldruckes der Höchstwert der Haftreibung an den Vorderrädern vergrößert, dagegen an den Hinterrädern verkleinert. Und von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, könnte sich $l_s^*/l = 1/2$ durchaus als günstiger Wert erweisen.

(Eingegangen am 4. Oktober 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *B. Stückler*, Berlin-Steglitz, Mariendorfer Str. 32b.

Zur Beulung des flachen kreiszylindrischen Schalenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie.

Von F. Drückler.

1. Aufgabenstellung. Stabilitätsuntersuchungen dünnwandiger anisotroper Rechteckplatten, bei denen die elastischen Hauptachsen nicht in die Richtung der Längs- und Querränder fallen, sind bereits zahlreich vorhanden. Für fast alle praktisch vorkommenden Fälle der Belastung und Lagerung haben *Green* und *Hearmon* [1] die kritischen Lasten berechnet und ihre Ergebnisse mit denen anderer Autoren verglichen. Für den wichtigen Fall der Schubbelastung eines Plattenstreifens hat *Müller-Magyari*[2] ebenfalls die kritische Schubspannung berechnet, wobei er einen anderen Weg als *Green* und *Hearmon* benutzt hat. Alle bisherigen Untersuchungen beziehen sich jedoch nur auf den „ebenen" Plattenstreifen. Die vorliegende Arbeit[3] befaßt sich darüber hinaus mit der Berechnung der Beulspannungen „gekrümmter" Plattenstreifen unter Druck- und Schubbelastung bei Neigung der elastischen Hauptachsen. Unter einem gekrümmten Plattenstreifen, für den in dieser Arbeit der vielleicht etwas deutlichere Ausdruck „flacher kreiszylindrischer Schalenstreifen" benutzt sei, ist ein durch zwei Achsenschnitte aus einer unendlich langen dünnen Kreiszylinderschale herausgeschnittener Streifen zu verstehen, dessen Breite klein gegenüber dem Krümmungsradius ist (Abb. 1).

Berechnungen für isotrope zylindrische Schalen haben unter anderem *Leggett* [4], *Kromm* [5] und *Marquerre* [6] vorgenommen. Während sich *Leggett* und *Marquerre* von vornherein mit der flachen Zylinderschale befassen, hat *Kromm* mit Hilfe des vollständigen Ansatzes die Gültigkeitsgrenze der Ergebnisse bei flacher Schale für die verschiedenen Lastfälle nachgewiesen. Man erhält bei der flachen Schale ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen, im allgemeinen Fall ein System von drei partiellen Differentialgleichungen. Dazu kommt noch, daß sich bei der flachen Zylinderschale die sogenannten Lastglieder in dem System der Differentialgleichungen in wesentlich günstigerer Form ergeben, was bei der Auswertung der Beuldeterminante von Bedeutung ist. Für die im folgenden zu behandelnden geneigten Hauptachsen wird gegenüber dem isotropen Fall das Elastizitätsgesetz und damit das Endergebnis allerdings wesentlich komplizierter. Die errechneten Formeln gestatten auch die Ermittlung der Beulspannungen bei versteiften Zylinderschalen aus Stahl und anderen isotropen Baustoffen, bei denen die Anisotropie durch orthogenale Steifenkreuze, die nicht in Richtung der Längs- und Querränder fallen, zustandekommt. Die Schwerachsen der Versteifungen müssen allerdings in der Mittelfläche liegen.

2. Bezeichnungen. Im folgenden sollen bedeuten

b die Plattenbreite,
l die Halbwellenlänge der Verschiebungsgrößen in x-Richtung, die beim unendlich langen Plattenstreifen periodisch verlaufen müssen,
t die Plattendicke,
u, v, w die Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche,
$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y; \bar{\gamma}$ die Verzerrungen der Mittelfläche,
$\varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma$ die Verzerrungen im Abstand z von der Mittelfläche,
$N_0 = \sigma t$ die gleichmäßig verteilte Druckbelastung je Längeneinheit,
$T_0 = \tau t$ die gleichmäßig verteilte Schubbelastung je Längeneinheit,
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ die Schnittreaktionen am Plattenelement,
c_{ik}, s_{ik} Elastizitätskonstanten.

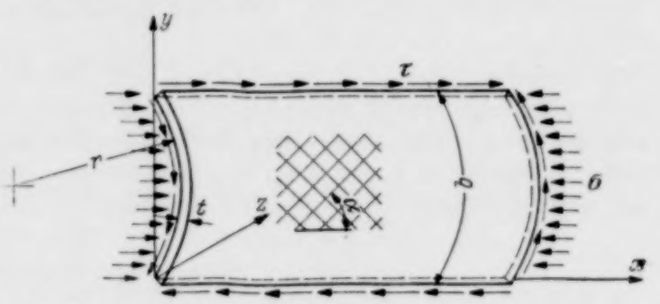


Abb. 1. Flacher zylindrischer Schalenstreifen bei beliebiger orthogonaler Anisotropie.

[1] *A. E. Green* und *R. F. S. Hearmon*, Phil. Mag., (7) 36 (1945) S. 650.
[2] *F. Müller-Magyari*, Österr. Ing.-Arch., 4 (1950), S. 22.
[3] Gekürzte Fassung einer von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation, Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. *W. Zerna*.
[4] *D. M. A. Leggett*, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 162 (1937) S. 62.
[5] *A. Kromm*, Luftfahrtforschung 15 (1938), S. 517.
[6] *Marquerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs S. 229. Berlin 1950.

3. Beziehungen zwischen Schnittkräften und Verschiebungen. Die Schnittkräfte der flachen Zylinderschale sind [1]

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x \, dz\,, \quad N_y = \int \sigma_y \, dz\,, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int \tau \, dz\,, \\ M_x &= \int \sigma_x z \, dz\,, \quad M_y = \int \sigma_y z \, dz\,, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int \tau z \, dz\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für den Fall der geneigten elastischen Hauptachsen muß das verallgemeinerte *Hooke*sche Gesetz [2] angesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\,\varepsilon_x + c_{12}\,\varepsilon_y + c_{13}\,\gamma\,, \\ \sigma_y &= c_{12}\,\varepsilon_x + c_{22}\,\varepsilon_y + c_{23}\,\gamma\,, \\ \tau &= c_{13}\,\varepsilon_x + c_{23}\,\varepsilon_y + c_{33}\,\gamma\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

oder aufgelöst nach den Verzerrungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\,\sigma_x + s_{12}\,\sigma_y + s_{13}\,\tau\,, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\,\sigma_x + s_{22}\,\sigma_y + s_{23}\,\tau\,, \\ \gamma &= s_{13}\,\sigma_x + s_{23}\,\sigma_y + s_{33}\,\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dabei gilt im Fall orthogonaler Anisotropie für die c_{ik} und s_{ik} folgendes: Betrachtet man zunächst den Sonderfall eines Koordinatensystems $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, dessen Achsen mit den elastischen Hauptachsen zusammenfallen, so bestehen für die zugehörigen $\tilde{c}_{ik}$ und $\tilde{s}_{ik}$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{c}_{11} = \frac{E_{\tilde{x}}}{1 - \nu_{\tilde{x}}\,\nu_{\tilde{y}}}\,, \quad \tilde{c}_{22} = \frac{E_{\tilde{y}}}{1 - \nu_{\tilde{x}}\,\nu_{\tilde{y}}}\,, \quad \tilde{c}_{33} = G\,, \quad \tilde{c}_{12} = \frac{\nu_{\tilde{x}}\,E_{\tilde{x}}}{1 - \nu_{\tilde{x}}\,\nu_{\tilde{y}}} = \frac{\nu_{\tilde{y}}\,E_{\tilde{y}}}{1 - \nu_{\tilde{x}}\,\nu_{\tilde{y}}}\,, \\ &\tilde{s}_{11} = \frac{1}{E_{\tilde{x}}}\,, \quad \tilde{s}_{22} = \frac{1}{E_{\tilde{y}}}\,, \quad \tilde{s}_{33} = \frac{1}{G}\,, \quad \tilde{s}_{12} = \frac{\nu_{\tilde{x}}}{E_{\tilde{x}}} = \frac{\nu_{\tilde{y}}}{E_{\tilde{y}}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist nun $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das nicht mit den elastischen Hauptachsen zusammenfällt, und α der Winkel zwischen x und $\tilde{x}$, dann drücken sich die c_{ik} durch die $\tilde{c}_{ik}$ folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \tilde{c}_{11}\cos^4\alpha + \tilde{c}_{22}\sin^4\alpha + (4\,\tilde{c}_{33} + 2\,\tilde{c}_{12})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ c_{33} &= \tilde{c}_{22}\cos^4\alpha + \tilde{c}_{11}\sin^4\alpha + (4\,\tilde{c}_{33} + 2\,\tilde{c}_{12})\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\,, \\ c_{33} &= \tilde{c}_{33}\cos^4\alpha + \tilde{c}_{33}\sin^4\alpha + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22} - 2\,\tilde{c}_{33} - 2\,\tilde{c}_{12})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ c_{12} &= \tilde{c}_{12}\cos^4\alpha + \tilde{c}_{12}\sin^4\alpha + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22} - 4\,\tilde{c}_{33})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ c_{13} &= (\tilde{c}_{11} - 2\,\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{12})\cos^3\alpha\sin\alpha + (-\tilde{c}_{22} + 2\,\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{12})\cos\alpha\sin^3\alpha\,, \\ c_{23} &= (\tilde{c}_{22} + 2\,\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{12})\cos^3\alpha\sin\alpha + (\tilde{c}_{11} - 2\,\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{12})\cos\alpha\sin^3\alpha\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Entsprechendes gilt für die s_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} s_{11} &= \tilde{s}_{11}\cos^4\alpha + \tilde{s}_{22}\sin^4\alpha + (\tilde{s}_{33} + 2\,\tilde{s}_{12})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ s_{22} &= \tilde{s}_{22}\cos^4\alpha + \tilde{s}_{11}\sin^4\alpha + (\tilde{s}_{33} + 2\,\tilde{s}_{12})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ s_{33} &= \tilde{s}_{33}\cos^4\alpha + \tilde{s}_{33}\sin^4\alpha + (4\,\tilde{s}_{11} + 4\,\tilde{s}_{22} - 2\,\tilde{s}_{33} - 8\,\tilde{s}_{12})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ s_{12} &= \tilde{s}_{12}\cos^4\alpha + \tilde{s}_{12}\sin^4\alpha + (\tilde{s}_{11} + \tilde{s}_{22} - \tilde{s}_{33})\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,, \\ s_{13} &= (2\,\tilde{s}_{11} - \tilde{s}_{33} - 2\,\tilde{s}_{12})\cos^3\alpha\sin\alpha + (-2\,\tilde{s}_{22} + \tilde{s}_{33} + 2\,\tilde{s}_{12})\cos\alpha\sin^3\alpha\,, \\ s_{23} &= (-2\,\tilde{s}_{22} - \tilde{s}_{33} + 2\,\tilde{s}_{12})\cos^3\alpha\sin\alpha + (2\,\tilde{s}_{11} - \tilde{s}_{33} - 2\,\tilde{s}_{12})\cos\alpha\sin^3\alpha\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen ergibt sich wie bei der ebenen Platte zu

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x - z\,w''\,, \qquad \varepsilon_y = \bar{\varepsilon}_y - z\,w^{\bullet\bullet}, \qquad \gamma = \bar{\gamma} - 2\,z\,w'^{\bullet}, \tag{7}$$

worin die überstrichenen Größen die Verzerrungen der Mittelfläche bedeuten. Für die flache Zylinderschale gilt

$$\bar{\varepsilon}_x = u'\,, \qquad \bar{\varepsilon}_y = v^{\bullet} + \frac{w}{r}\,, \qquad \bar{\gamma} = u^{\bullet} + v'\,. \tag{8}$$

---

[1] Siehe Fußnoten 4 und 5 von Seite 288.

[2] *W. Geckeler*, Elastizitätstheorie anisotroper Körper, Handbuch der Physik, Band 6, S. 104; Berlin 1928; *A. E. H. Love* und *A. Timpe*: Lehrbuch der Elastizität, Deutsche Übersetzung, Leipzig und Berlin 1907; siehe auch *Müller-Magyari*, Fußnote 2 von Seite 288

Im Vergleich zur Platte kommt für $\bar{\varepsilon}_y$ ein Zusatzglied hinzu, das durch die Vergrößerung des Kreises mit dem Halbmesser r infolge w entsteht. Man erhält also

$$\varepsilon_x = u' - z w'', \qquad \varepsilon_y = v^{\cdot} + \frac{w}{r} - z w^{\cdot\cdot}, \qquad \gamma = u^{\cdot} + v' - 2 z w'^{\cdot}. \tag{9}$$

Setzt man (2) und (9) in (1) ein, so erhält man das Elastizitätsgesetz für die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_x &= t\left[c_{11} u' + c_{12}\left(v^{\cdot} + \frac{w}{r}\right) + c_{13}(u^{\cdot} + v')\right], \\ N_y &= t\left[c_{12} u' + c_{22}\left(v^{\cdot} + \frac{w}{r}\right) + c_{23}(u^{\cdot} + v')\right], \\ N_{xy} &= t\left[c_{13} u' + c_{23}\left(v^{\cdot} + \frac{w}{r}\right) + c_{33}(u^{\cdot} + v')\right], \\ M_x &= -\frac{t^3}{12}\left[c_{11} w'' + c_{12} w^{\cdot\cdot} + 2 c_{13} w'^{\cdot}\right], \\ M_y &= -\frac{t^3}{12}\left[c_{12} w'' + c_{22} w^{\cdot\cdot} + 2 c_{23} w'^{\cdot}\right], \\ M_{xy} &= -\frac{t^3}{12}\left[c_{13} w'' + c_{21} w^{\cdot\cdot} + 2 c_{33} w'^{\cdot}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

4. Aufstellung der Beulbedingungen. Die Lösung des vorliegenden Stablilitätsproblems erfolgt mit Hilfe der Energiemethode [1]. Dazu werden die Formänderungsarbeiten der inneren und äußeren Kräfte benötigt. Die Formänderungsarbeit der inneren Kräfte setzt sich zusammen aus der Formänderungsarbeit der Zusatzspannungen, die in der Schale infolge der Verschiebungen u, v und w entstehen und aus der Formänderungsarbeit, welche die Grundspannungen bei den zusätzlichen Verzerrungen der Schale leisten. Für die Formänderungsarbeit der Zusatzspannungen bezogen auf die Flächeneinheit gilt

$$a_{i1} = -\frac{1}{2}\int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau \gamma)\, dz\,. \tag{11}$$

Mit (2) und (7) erhält man daraus die gesamte Formänderungsarbeit der Zusatzspannungen zu

$$\begin{aligned} A_{i1} = -\frac{1}{2}\int_{-t/2}^{+t/2}\int_0^b\int_0^{2l} &[\sigma_x \bar{\varepsilon}_x - (c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\gamma)\, z w'' + \sigma_y \bar{\varepsilon}_y - (c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\gamma)\, z w^{\cdot\cdot} \\ &+ \tau \bar{\gamma} - (c_{13}\varepsilon_x + c_{23}\varepsilon_y + c_{33}\gamma)\, 2 z w'^{\cdot}]\, dx\, dy\, dz\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Formänderungsarbeit der Kräfte des Grundzustandes ist beim Vorhandensein von Normal- und Schubkräften gegeben zu

$$a_{i2} = -\tau t (1 + \bar{\varepsilon}_x)(1 + \bar{\varepsilon}_y) \sin \bar{\gamma}\,, \qquad a_{i3} = \sigma t\, \bar{\varepsilon}_x\,. \tag{13}$$

Hierbei müssen $\sin \bar{\gamma}$ und $\bar{\varepsilon}_x$ bis auf quadratische Glieder berechnet werden. Sie ergeben sich genau wie bei der Platte zu

$$\sin \bar{\gamma} = \frac{u^{\cdot} + v' + w' w^{\cdot}}{(1 + \bar{\varepsilon}_x)(1 + \bar{\varepsilon}_y)}, \qquad \bar{\varepsilon}_x = u' + \frac{1}{2} w'^2\,. \tag{14}$$

Damit wird die Formänderungsarbeit der Kräfte des Grundzustandes

$$A_{i2} + A_{i3} = -\tau t \int_0^b\int_0^{2l} (u^{\cdot} + v' + w' w^{\cdot})\, dx\, dy + \sigma t \int_0^b\int_0^{2l}\left(u' + \frac{1}{2} w'^2\right) dx\, dy\,. \tag{15}$$

Die Formänderungsarbeit der äußeren Kräfte lautet für den Fall des unendlich langen Schalenstreifens

$$A_a = \tau t \int_0^{2l} (u_{y=b} - u_{y=0})\, dx + \tau t \int_0^b (v_{x=2l} - v_{x=0})\, dy - \sigma t \int_0^b (u_{x=2l} - u_{x=0})\, dy\,. \tag{16}$$

Mit Berücksichtigung von (8) und (9) und Integration über der Schalenstärke ergibt sich nun die gesamte Formänderungsarbeit, die gleich der negativen ersten und zweiten Variation des Potentials des Grundzustandes ist.

[1] Eine zusammenfassende Darstellung der Energiemethode für Stabilitätsprobleme findet sich z. B. bei *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin 1950.

Wegen Gleichgewicht des Grundzustandes wird die erste Variation gleich Null, was aus (15) und (16) zu ersehen ist, indem sich die linearen Anteile herausheben. Für die zweite Variation, die mit $\frac{1}{2}\,\delta^2\pi_0$ bezeichnet sei, gilt dann

$$\delta^2\pi_0 = \int_0^b\int_0^{2l} t\left[\sigma_x u' + \sigma_y\left(v^{\cdot} + \frac{w}{r}\right) + \tau\,(v' + u^{\cdot}) + \frac{t^2}{12}\,(c_{11}w''^2 + c_{22}w^{\cdot\cdot 2} + 4\,c_{33}w'^{\cdot 2} + 2\,c_{12}w''\,w^{\cdot\cdot} + 4\,c_{13}w''\,w'^{\cdot} + 4\,c_{23}w^{\cdot\cdot}\,w'^{\cdot}) + 2\,\tau\,w'\,w^{\cdot} - \sigma\,w'^2\right]dx\,dy\,. \tag{17}$$

Für das zu lösende Variationsproblem $\delta(\delta^2\pi_0) = 0$ ist hier das Verfahren nach *Galerkin* benutzt worden. Führt man in (17) die Variation $\delta(\delta^2\pi_0)$ durch, so erhält man für die mit u und v behafteten Glieder die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= t\int_0^b\int_0^{2l}\sigma_x\,\delta u'\,dx\,dy = t\int_0^b \sigma_x\,\delta u\,\Big|_0^{2l}dy - t\int_0^b\int_0^{2l}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\,\delta u\,dx\,dy,\\
R_2 &= t\int_0^b\int_0^{2l}\sigma_y\,\delta v^{\cdot}\,dx\,dy = t\int_0^{2l}\sigma_y\,\delta v\,\Big|_0^b dx - t\int_0^b\int_0^{2l}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\,\delta v\,dx\,dy,\\
R_3 &= \frac{t}{r}\int_0^b\int_0^{2l}\sigma_y\,\delta w\,dx\,dy\,,\\
R_4 &= t\int_0^b\int_0^{2l}\tau\,\delta v'\,dx\,dy = t\int_0^b\tau\,\delta v\,\Big|_0^{2l}dy - t\int_0^b\int_0^{2l}\frac{\partial\tau}{\partial x}\,\delta v\,dx\,dy,\\
R_5 &= t\int_0^b\int_0^{2l}\tau\,\delta u^{\cdot}\,dx\,dy = t\int_0^{2l}\tau\,\delta u\,\Big|_0^b dx - t\int_0^b\int_0^{2l}\frac{\partial\tau}{\partial y}\,\delta u\,dx\,dy.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die unter den Doppelintegralen verbleibenden Ausdrücke sind für verschwindende $\delta u, \delta v$ die *Euler*schen Differentialgleichungen. Man kann sie durch Einführung einer Spannungsfunktion identisch befriedigen:

$$\Phi'' = \sigma_y\,, \qquad \Phi^{\cdot\cdot} = \sigma_x\,, \qquad -\Phi'^{\cdot} = \tau\,. \tag{19}$$

Die mit w behafteten Glieder ergeben Ausdrücke entsprechend (18). Bei Anwendung des *Galerkin*-Verfahrens hat man also nur für Φ und w, und nicht für u, v, w, Ansatzfunktionen zu wählen. Hinsichtlich der Randbedingungen gilt dabei folgendes: In x-Richtung soll die Schale unendlich lang sein (Abb. 1). Es wird daher in dieser Richtung periodischer Verlauf der u, v, w und ihrer Ableitungen verlangt. An den Längsrändern wird momentenfreie Auflagerung, Verschwinden der Tangential- und Radialverschiebung und das Verschwinden der Normalspannung gefordert, d. h.

für $y = 0$, $y = b$: $\qquad u = 0\,, \quad w = 0\,, \quad N_y = 0\,, \quad M_y = 0\,.$ (20)

Zur Näherungslösung nach *Galerkin* werden folgende Ansätze gemacht:

$$\Phi = U(y)\,e^{i\beta x\frac{\pi}{b}}\,, \quad w = W(y)\,e^{i\beta x\frac{\pi}{b}}\,, \quad \beta = \frac{b}{l} \tag{21}$$

mit

$$U(y) = \sum_m A_m \sin\frac{m\pi y}{b}\,, \quad W(y) = \sum_m B_m \sin\frac{m\pi y}{b}\,. \tag{22}$$

Die Ansätze befriedigen nur angenähert die geforderten Randbedingungen. Sie sind trotzdem brauchbar, da die Ausdrücke für M_y und u zeigen, daß nur die Glieder an den Rändern nicht verschwinden, die aus der Neigung der elastischen Hauptachsen herrühren. Nach Variation unter dem Integralzeichen in (17) — wie bereits für u und v gezeigt — erhält man mit den Ansätzen (21) die folgenden Gleichungen, in denen nun auch die Randausdrücke, welche infolge der nur angenäherten Befriedigung der Randbedingungen nicht verschwinden, enthalten sind:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^b\Big[s_{11}U^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + s_{22}\frac{\pi^4}{b^4}\beta^4 U - (2\,s_{12} + s_{33})\frac{\pi^2}{b^2}\beta^2 U^{\cdot\cdot} + 2\,s_{23}\frac{\pi^3}{b^3}\,i\,\beta^3\,U^{\cdot} - 2\,s_{13}\frac{\pi}{b}\,i\,\beta\,U^{\cdot\cdot\cdot}\\
&\qquad + \frac{\pi^2}{b^2}\beta^2\,W\,\frac{t}{r}\Big]\delta U\,dy - s_{13}\frac{\pi}{b}\,i\,\beta\,U^{\cdot}\delta U^{\cdot}\,\Big|_0^b = 0\,,\\
&\int_0^b\Big\{\frac{t^2}{12}\Big[c_{11}\frac{\pi^4}{b^4}\beta^4\,W + c_{22}W^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - 2\,(2\,c_{33} + c_{12})\frac{\pi^2}{b^2}\beta^2\,W - 4\,c_{13}\frac{\pi^3}{b^3}\,i\,\beta^3\,W^{\cdot} + 4\,c_{23}\frac{\pi}{b}\,i\,\beta\,W^{\cdot\cdot\cdot}\\
&\qquad - \frac{1}{rt}\frac{\pi^2}{b^2}\beta^2\,U - \sigma\frac{\pi^2}{b^2}\beta^2\,W - 2\,\tau\frac{\pi}{b}\,i\,\beta\,W^{\cdot}\Big\}\delta W\,dy + 2\,\frac{t^2}{12}\,c_{23}\frac{\pi}{b}\,i\,\beta\,W^{\cdot}\delta W^{\cdot}\,\Big|_0^b = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wie noch weiter unten gezeigt wird, ist jedoch der Einfluß der Randausdrücke auf das Endergebnis von untergeordneter Bedeutung. Mit den Ansätzen (22) und ihren Ableitungen erhält man unter Berücksichtigung der Integrationsformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{m\pi y}{b} = \begin{cases}\dfrac{b}{\pi}\dfrac{2n}{n^2-m^2} & \text{für } n\pm m \text{ ungerade},\\ 0 & \text{für } n\pm m \text{ gerade},\end{cases}\\
&\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y}{b} = \int_0^b \cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{m\pi y}{b} = \begin{cases}0 & \text{für } n\neq m,\\ \dfrac{b}{2} & \text{für } n=m,\end{cases}\\
&\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{m\pi y}{b}\Big|_0^b = \begin{cases}-2 & \text{für } n\pm m \text{ ungerade},\\ 0 & \text{für } n\pm m \text{ gerade}\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

folgendes Gleichungssystem für die Bestimmung der Freiwerte A und B:

$$A_n a_n + i\frac{8}{\pi}\sum_m A_m \frac{n\cdot m}{n^2-m^2} c_m + B_n b = 0\,, \tag{25a}$$

$$-A_n e + B_n(d_n-\sigma') - i\frac{8}{\pi}\sum_m B_m \frac{n\cdot m}{n^2-m^2}(f_m+\tau') = 0\,, \tag{25b}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&a_n = s_{11}n^4 + s_{22}\beta^4 + (2s_{12}+s_{33})n^2\beta^2\,,\quad c_m = s_{23}\beta^3 + \frac{1}{2}s_{13}\beta(n^2+m^2)\,,\\
&b = \frac{t}{r}\frac{b^2}{\pi^2}\beta^2\,,\qquad e = \frac{1}{rt}\frac{b^2}{\pi^2}\beta^2\,,\quad \sigma' = \sigma\frac{b^2}{\pi^2}\beta^2\,,\qquad \tau' = \tau\frac{b^2}{\pi^2}\beta\,,\\
&d_n = \frac{t^2}{12}[c_{11}\beta^4 + c_{22}n^4 + 2(2c_{33}+c_{12})n^2\beta^2]\,,\quad f_m = \frac{t^2}{12}[2c_{13}\beta^3 + c_{23}\beta(n^2+m^2)]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Hierbei durchlaufen n und m gerade und ungerade Zahlenfolgen, $n\pm m$ ungerade. Das Gleichungssystem ist homogen, es hat nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Die Entwicklung dieser sogenannten Beuldeterminante liefert die gesuchten kritischen Lasten. Aus dem Gleichungssystem (25a) kann man für $n = 1, 2, \ldots, i$ die A durch B ausdrücken und in das Gleichungssystem (25b) einsetzen. Man erhält so eine Koeffizientendeterminante i-ter Ordnung.

5. Auswertung für reine Schubkraft. Streicht man in (25a) und (25b) die Glieder mit den Konstanten c_{13}, s_{13}, und c_{23}, s_{23}, die nur bei geneigten Hauptachsen auftreten und setzt für eine Neigung von $\alpha = 0$ für s_{ik}, c_{ik} die Werte (4) für Isotropie ein, so entkoppeln sich die beiden Systeme (25a) und (25b). Man erhält ein Gleichungssystem mit den Konstanten B_n, B_m, dessen Determinante dieselbe ist, die *Kromm*[1] als Ergebnis seiner Berechnung erhält. Bei *Green* und *Hearmon*[2] findet man für die unendlich lange Platte unter Schubbelastung bei geneigten Hauptachsen als endgültige Gleichung dieselbe wie hier in (25b), wenn man die Krümmungsglieder streicht. Numerische Rechnungen sind allerdings nur für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ zu finden unter Verwendung der zweiten Näherung. (Die ersten neun Elemente der unendlichen Determinante werden betrachtet.) Angaben über die Differenz der ersten und zweiten Näherung sind nicht vorhanden. Für denselben Fall gibt *Müller-Magyari*[3] Werte an, die auf anderem Wege gefunden worden sind. Es ist deshalb dieser Lastfall näher untersucht worden. Man erhält aus (25b) für den ebenen Fall:

Erste Näherung:

$$[2c_{13}\beta^2 + 5c_{23} + \tau^*]^2 = \left(\frac{3\pi}{16}\right)^2\beta^2\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{1}{\beta^2} + 2(c_{12}+2c_{33})\right]\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{16}{\beta^2} + 8(c_{12}+2c_{33})\right]$$
$$\text{mit } \tau^* = \tau\frac{12\,b^2}{t^2\pi^2}\,. \tag{27}$$

Zweite Näherung:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta^2\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{1}{\beta^2} + 2(c_{12}+2c_{33})\right]\left\{\beta^4\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{16}{\beta^2} + 8(c_{12}+2c_{33})\right]\right.\\
&\qquad\left.\times\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{81}{\beta^2} + 18(c_{12}+2c_{33})\right] - \left(\frac{48}{5\pi}\right)^2\beta^2(2c_{13}\beta^2 + 13c_{23} + \tau^*)^2\right\}\\
&\qquad = \left(\frac{16}{3\pi}\right)^2\beta^4\left[c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{81}{\beta^2} + 18(c_{12}+2c_{33})\right][2c_{13}\beta^2 + 5c_{23} + \tau^*]^2\,.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

[1] Siehe Fußnote 5 von Seite 288. [2] Siehe Fußnote 1 von Seite 288. [3] Siehe Fußnote 2 von Seite 288.

Numerische Rechnungen sind wie bei *Müller-Magyari* für Sperrholz (Buche, drei Lagen mit $E_y = 120\,000$ kg/cm², $E_x = 60\,000$ kg/cm², $\nu_x = \nu_y \approx 0$, $G = 10\,000$ kg/cm², geltend für eine Gesamtwandstärke $t = 0{,}8 - 1{,}5$ mm) durchgeführt worden. Man erhält

für $\alpha = 0°$, erste Näherung: $\tau^*/40\,000 = 10{,}05$,

für $\alpha = 90°$, erste Näherung: $\tau^*/40\,000 = 7{,}11$,

für $\alpha = 45°$, erste Näherung: $\tau_1^*/40\,000 = -8{,}52$, $\tau_2^*/40\,000 = 12{,}83$,

zweite Näherung: $\tau_1^*/40\,000 = -7{,}67$, $\tau_2^*/40\,000 = 12{,}59$.

Im folgenden sind diese Werte, mit denen von *Müller-Magyari* und *Seydel*[1] verglichen. Als Bezugsgröße für die Kurve nach *Müller-Magyari* gilt

$$\varkappa = \frac{\pi^2}{12}\,\bar{\mu}\,\sqrt[4]{c_{11}\,c_{22}^3}\,\frac{1}{10^4}\,,$$

wobei

$$\bar{\mu} = \frac{\tau_k\,12\,b^2}{\pi^2\,t^2\,\sqrt[4]{c_{11}\,c_{22}^3}} \qquad \text{ist;}$$

die Werte der vorliegenden Arbeit sind in einfacher Weise umgeformt worden: $\tau^*/40\,000 = \varkappa\,\frac{3}{\pi^3}$. Die ersten Näherungen liefern für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ gute Ergebnisse. Da für $\alpha = 45°$ genaue Vergleichswerte fehlen, sind hierfür die erste und zweite Näherung berechnet worden; sie differieren um rund 10%. Es bleibt zu erwarten, daß der Unterschied von der zweiten zur dritten Näherung ziemlich bedeutungslos ist. Auf die numerische Auswertung der dritten Näherung ist deshalb verzichtet worden, zumal der Aufwand dafür jenseits des Erträglichen liegen dürfte.

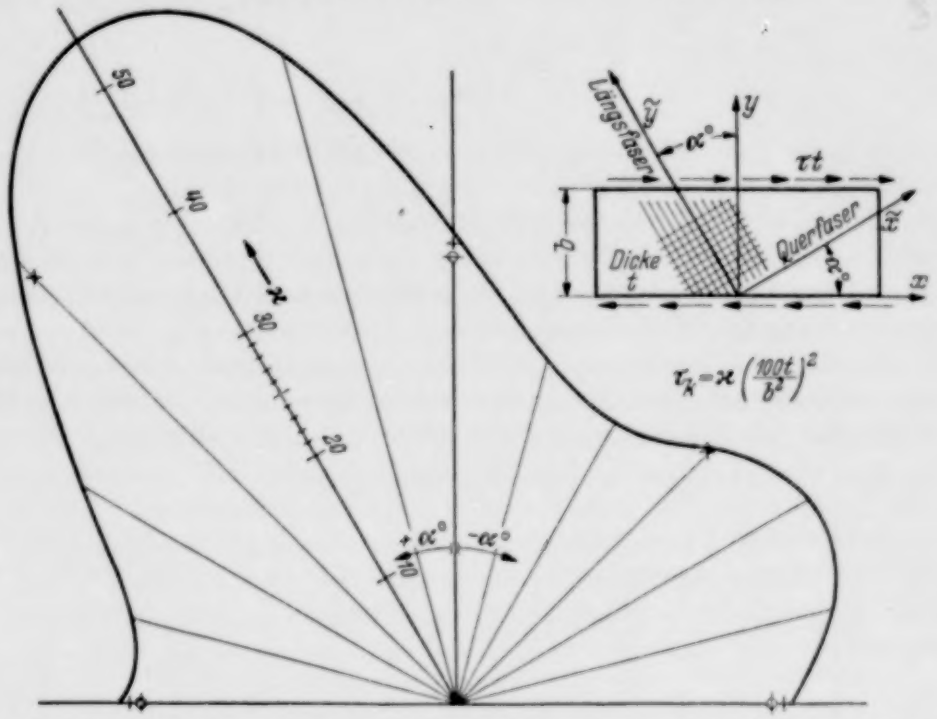


Abb. 2. Kritische Schubspannungen eines unendlich langen Plattenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie nach *F. Müller-Magyari*. Beispiel: Sperrholz, E (längs) = 120 000 kg/cm, E (quer) = 60 000 kg, G (längs-quer) = 10 0 00 kg/cm.
—— Werte nach *Müller-Magyari*, 0 Werte nach *Seydel*, + Werte des Verfassers.

Der geringe Einfluß der Randausdrücke (23) auf die Ergebnisse sei für die erste Näherung für $\alpha = 45°$ nachgewiesen. Ohne die Randausdrücke verändern sich die Abkürzungen c_m und f_m in (26) zu

$$\left.\begin{aligned} c_m &= (\beta^3\,s_{23} + \beta^2\,m^2\,c_{13})\,, \\ f_m &= (2\,\beta^3\,c_{13} + 2\,\beta\,m^2\,c_{23})\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Damit erhält man für den ebenen Fall die erste Näherung

$$\begin{aligned} &[2\,(c_{13}\,\beta^2 + c_{23}) + \tau^*]\,[2\,(c_{13}\,\beta^2 + 4\,c_{23}) + \tau^*] \\ &\quad = \left(\frac{3\,\pi}{16}\right)^2 \beta^2 \left[c_{11}\,\beta^2 + c_{22}\,\frac{1}{\beta^2} + (4\,c_{33} + 2\,c_{12})\right]\left[c_{11}\,\beta^2 + c_{22}\,\frac{16}{\beta^2} + 4\,(4\,c_{33} + 2\,c_{12})\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Die numerische Rechnung für $\alpha = 45°$ ergibt mit

$$\tau_1^*/40\,000 = -8{,}58\,, \qquad \tau_2^*/40\,000 = 12{,}89$$

gegenüber den oben angegebenen genauen Werten nur eine bedeutungslose Abweichung.

Gibt man sich mit den am Sonderfall der Platte gewonnenen Erkenntnissen zufrieden und nimmt die Differenz zwischen der ersten und zweiten Näherung in Hinblick auf die ungenaue Erfüllung der theoretisch vorausgesetzten Eigenschaften anisotroper Baustoffe auch beim Schalenstreifen als noch tragbar hin, so erhält man in diesem Fall für die kritische Beulspannung durch reine Schubbelastung aus der Auflösung der Systeme (25a) und (25b) für $n = 1, 2$; $m = 1, 2$; $n \pm m$ ungerade

[1] *E. Seydel*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 169.

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Big\{ 2\,c_{13}\beta^2 + 5\,c_{23} + \tau^* \\
&\quad + \frac{\omega\beta^4(\beta^2 s_{23} + 2{,}5\,s_{13})}{[s_{11} + s_{22}\beta^4 + (2s_{12} + s_{33})\beta^2]\,[16\,s_{11} + s_{22}\beta^4 + 4\,(2s_{12} + s_{33})\beta^2] - \left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 \beta^2(\beta^2 s_{23} + 2{,}5\,s_{13})^2} \Big\}^2 \\
&= \left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 \Big\{ c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{1}{\beta^2} + 2\,(2\,c_{33} + c_{12}) \\
&\quad + \frac{\omega\beta^2\,[16\,s_{11} + s_{22}\beta^4 + (2s_{12} + s_{33})\,4\beta^2]}{[s_{11} + s_{22}\beta^4 + (2s_{12} + s_{33})\beta^2]\,[16\,s_{11} + s_{22}\beta^4 + 4\,(2s_{12} + s_{33})\beta^2] - \left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 \beta^2(\beta^2 s_{23} + 2{,}5\,s_{13})^2} \Big\} \\
&\times \Big\{ c_{11}\beta^2 + c_{22}\frac{16}{\beta^2} + B\,(2\,c_{33} + c_{12}) \\
&\quad + \frac{\omega\beta^2\,[s_{11} + s_{22}\beta^4 + (2s_{12} + s_{33})\beta^2]}{[s_{11} + s_{22}\beta^4 + (2s_{12} + s_{33})\beta^2]\,[16\,s_{11} + s_{22}\beta^4 + 4\,(2s_{12} + s_{33})\beta^2] - \left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 \beta^2(\beta^2 s_{23} + 2{,}5\,s_{13})^2} \Big\}\beta^2
\end{aligned}
\right\} \tag{31}
$$

$$
\text{mit} \qquad \tau^* = \tau\,\frac{12\,b^2}{\pi^2 t^2}\,, \qquad \omega = \frac{12\,b^4}{r^2\pi^4 t^2}\,.
$$

Man sieht, daß für den flachen kreiszylindrischen Schalenstreifen praktisch nur die erste Näherung zur numerischen Berechnung in Frage kommt.

Numerische Rechnungen sind für Sperrholz (mit denselben Elastizitätskonstanten wie beim ebenen Fall) bei einer Hauptachsenneigung von $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ durchgeführt worden. Die kritischen Schubspannungen $\tau^*/40000$ und die dazugehörigen β^2-Werte sind für verschiedene Krümmungen in Abhängigkeit von $\sqrt[4]{\omega}$ aufgetragen.

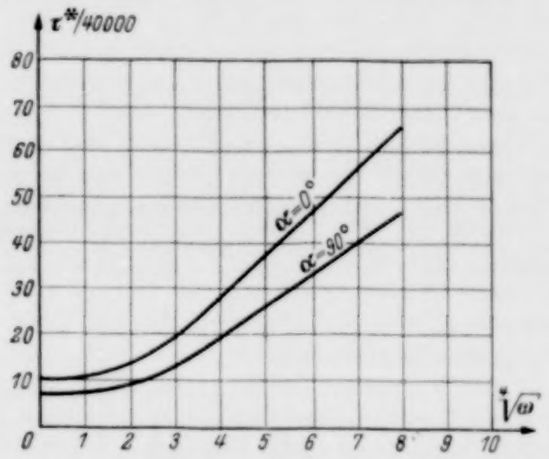


Abb. 3. Kritische Schubspannungen eines flachen zylindrischen Schalenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$, in Abhängigkeit von $\sqrt[4]{\omega}$.

E (längs) = 120 000 kg/cm, E (quer) = 60 000 kg/cm,
G (längs-quer) = 10 000 kg/cm.

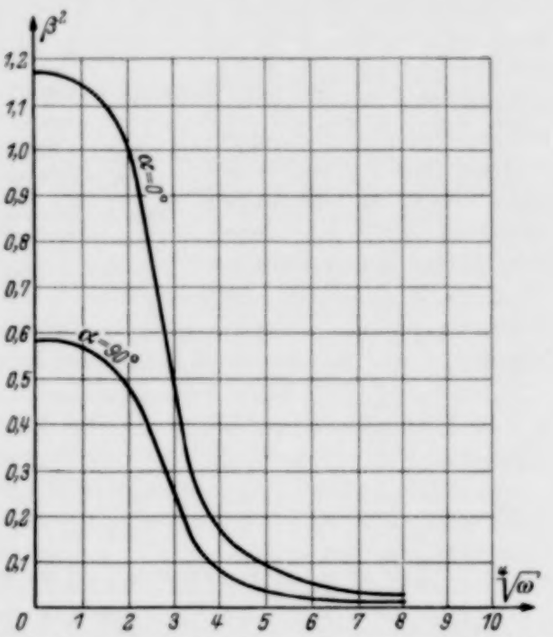


Abb. 4. Die zu den kritischen Schubspannungen eines flachen zylindrischen Schalenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ gehörenden bezogenen Halbwellenlängen β^2 in Abhängigkeit von $\sqrt[4]{\omega}$.

5. Zusammenfassung. Es wird die Stabilitätsgrenze eines flachen kreiszylindrischen Schalenstreifens unter Druck- und Schubkräften bei beliebiger orthogonaler Anisotropie untersucht. An den Längsrändern ist er angenähert momentenfrei auf biegeweichen Längsträgern gelagert. Die Ermittlung der kritischen Last geschieht mit Hilfe der Energiemethode unter Benutzung des *Galerkin*schen Verfahrens, wobei für die Verschiebungen *Fourier*-Reihen angesetzt werden. Man erhält als Ergebnis der Rechnung eine unendliche Beuldeterminante. Diese wird für den ebenen Fall (Plattenstreifen) für Neigung der elastischen Hauptachsen ausgewertet und mit Ergebnissen aus bereits bekannten Untersuchungen verglichen.

(Eingegangen am 6. Oktober 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Friedrich Drückler*, Bremen, Gröpelinger Heerstraße 399.

Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg.

Von W. Szablewski.

1. Einleitung. Vernachlässigt man in der Bewegungsgleichung einer turbulenten Grenzschichtströmung für eine wandnahe Zone die Trägheitsglieder, so erhält man durch Integration die Gleichung

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y \tag{1}$$

(τ_0 Wandschubspannung, sonstige Bezeichnungen siehe Abschn. 2). Aus dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, daß bei einer Grenzschichtströmung gegen wachsenden Druckanstieg, der schließlich die Ablösung ($\tau_0 = 0$) erzwingt, der Druckgradient immer weiter zur Wand hin bestimmend in das Gleichgewicht der Kräfte eingreift und nicht mehr gegenüber den Reibungskräften vernachlässigbar ist. Für das bekannte logarithmische Geschwindigkeitsgesetz, das aus der Annahme konstanter Schubspannung ($\tau \approx \tau_0$) gewonnen wird, bedeutet das, daß seine Existenzschicht mit wachsendem Druckanstieg immer weiter eingeengt und schließlich ausgelöscht wird [für die Ablösungsstelle kann nach (1) von einem logarithmischen Gesetz offenbar nicht mehr die Rede sein]. In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] habe ich auf der Grundlage des *Prandtl*schen Schubspannungsansatzes ein dem Druckgradienten Rechnung tragendes Wandgesetz als Erweiterung des logarithmischen Gesetzes abgeleitet, was voraussetzte, daß eine Schicht mit logarithmischen Gesetz zumindest noch rudimentär vorhanden ist. Es blieben also Bereiche stärkeren Druckanstiegs und insbesondere die Ablösung ausgeschlossen. In der vorliegenden Abhandlung lassen wir die genannte Einschränkung fallen und beschreiben die wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg in voller Allgemeinheit gemäß (1). Wir erfassen also insbesondere auch die Ablösung.

2. Approximative Berechnung eines elliptischen Integrals. Im folgenden bedeuten: x die Bogenlänge der Profilkontur, y den Wandabstand, δ die Grenzschichtdicke, u, v die Geschwindigkeitskomponenten in x, y-Richtung, ϱ die Dichte, μ die Zähigkeit, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit, p den statischen Druck, τ die Schubspannung.

In Gleichung (1) konstituiert sich die Schubspannung aus einem laminaren und turbulenten Anteil

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

mit $\tau_{lam} = \mu\, \partial u/\partial y$ und — bei Zugrundelegung des *Prandtl*schen Ansatzes — $\tau_{turb} = \varrho\, l^2\, (\partial u/\partial y)^2$ mit dem Mischungsweg l. Für l setzen wir in Wandnähe unter Berücksichtigung der laminaren Unterschicht

$$l \approx \varkappa\, (y - \delta_0)\,, \tag{2}$$

wo δ_0 die Dicke der laminaren Unterschicht ist.

Führen wir die folgenden dimensionslosen Größen ein:

$$\varphi = \frac{u}{u_1}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad Re_\delta = \frac{u_1\, \delta}{\nu}, \quad c_1 = \frac{\tau_0}{\varrho\, u_1^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{-(dp/dx)\, \delta}{(\varrho/2)\, u_1^2}\,,$$

wo u_1 die Geschwindigkeit der Potentialströmung am Rande der Grenzschicht ist, so transformiert sich (1) in

$$\frac{1}{Re_\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 = c_1 - \frac{\lambda}{2}\, \eta\,. \tag{3}$$

Mit (2) läßt sich (3) integrieren und ergibt, wenn wir noch

$$c_1 - \frac{\lambda}{2}\, \eta = \left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\, \eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\, (\eta - \eta_0) \qquad \text{mit} \qquad \eta_0 = \frac{\delta_0}{\delta}$$

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 268.

beachten,

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\frac{1}{Re_\delta}\int_0^{\eta-\eta_0} \frac{\sqrt{1 + 4\,\varkappa^2\,Re_\delta^2\,(\eta-\eta_0)^2\left[\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\,(\eta-\eta_0)\right]} - 1}{(\eta-\eta_0)^2}\,d(\eta-\eta_0)$$

$$+ Re_\delta\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\frac{\eta_0}{2}\right)\eta_0 \qquad (4)$$

für $\eta - \eta_0 \ll 1$. Das letztere Glied gibt dabei die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht an.

Für nicht zu kleine Wandabstände erhält man, da Re_δ normalerweise eine sehr große Zahl ist,

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{1}{\varkappa}\int^{\eta-\eta_0} \frac{\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\,(\eta-\eta_0)}}{\eta-\eta_0}\,d(\eta-\eta_0) \\ &\text{für} \\ &\frac{1}{2\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}} \ll \eta - \eta_0 \ll 1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hier läßt sich die Quadratur mittels elementarer Funktionen durchführen und ergibt

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \frac{2}{\varkappa}&\left(\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\,(\eta-\eta_0)} - \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}\right) \\ &+ \frac{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}}{\varkappa}\ln\frac{\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\,(\eta-\eta_0)} - \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}}{\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0\right) - \frac{\lambda}{2}\,(\eta-\eta_0)} + \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}} + \text{konst.}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei die Integrationskonstante jedoch wegen der in (5) bei $\eta - \eta_0 = 0$ auftretenden Singularität nicht bestimmbar ist. Die in (5) angegebene Begrenzung des Wandabstandes nach unten ist physikalisch mit der Vernachlässigung der laminaren Reibung gegenüber der turbulenten Reibung gleichbedeutend: man erhält (6) auch sofort aus (3), wenn man dort die laminare Reibung vernachlässigt. Die obige Gleichung gibt also die funktionale Gestalt an, die für $\eta - \eta_0 \approx \eta$ an Stelle des logarithmischen Gesetzes zu treten hätte! Für $\eta_0 \ll \eta$ und $-\frac{\lambda}{2}\,\eta_0 \ll c_1$ erhält man die bereits von uns früher abgeleitete Funktion [1]; die zweite Bedingung ist jedoch im Bereich der Ablösung offenbar nicht erfüllbar.

Zur Berechnung der Integrationskonstanten ist die Berechnung des vollständigen Integrals (4) nicht zu umgehen. Wir führen diese im folgenden approximativ durch, wobei sich der Fehler als praktisch belanglos ergeben wird.

Für die Berechnung erweist es sich zunächst als zweckmäßig, das Integral (4) auf die Variablen

$$\frac{u}{V_*} = \frac{\varphi}{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}}\,, \qquad \frac{V_*\,y}{\nu} = Re_\delta\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta_0}\,\eta$$

zu transformieren [2]. (Auf die physikalische Bedeutung dieser Transformation kommen wir in

[1] *W. Szablewski*, a. a. O., Gleichung (6):

$$\varphi = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta} - \sqrt{c_1}\right) + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\ln\frac{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta} + \sqrt{c_1}} + \text{konst.}$$

[2] Hierbei bedeutet $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\,\delta_0}$, vgl. Gl. (24).

Abschn. 3 näher zu sprechen.) Man erhält dann bei vorübergehender Einführung der Abkürzungen[1]

$$y = \frac{u}{V_*}, \qquad x = \frac{V_* y}{\nu} - \frac{V_* \delta_0}{\nu}$$

für (4) die einfachere Gestalt

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^x \frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2 (1 + F x)} - 1}{x^2}\, dx + \frac{V_* \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right), \tag{7}$$

wobei der Parameter

$$F = \frac{-\lambda/2}{Re_\delta \left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\eta_0\right)^{3/2}}$$

technisch eine positive kleine Zahl ($\ll 1$) ist (vgl. Abschn. 4). Es handelt sich also um ein elliptisches Integral. Die Berechnung könnte im Einzelfall mittels der Theorie der elliptischen Integrale oder auch einfach durch graphische Integration erfolgen. Nachfolgend werden wir in sehr guter Approximation eine einfache Beschreibung mittels elementarer Funktionen geben.

a) Wir nehmen folgende identische Umformung des Integrals (7) vor:

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^x \frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2} - 1}{x^2}\, dx + \frac{V_* \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^x \left[\frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2 (1 + F x)} - \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}}{x^2}\right] dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das erste Integral läßt sich elementar berechnen und ergibt einschließlich der obigen Konstante

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\frac{1 - \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}}{x} + \frac{1}{\varkappa}\ln\left(2\varkappa x + \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}\right) + \frac{V_* \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right). \tag{9}$$

In der Asymptote ergibt diese Funktion eine logarithmische Gesetzmäßigkeit [2].

Im zweiten Integral setzen wir approximativ

$$\frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2 (1 + F x)} - \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}}{x^2} \approx 2\varkappa\left(\frac{\sqrt{1 + F x} - 1}{x}\right). \tag{10}$$

Physikalisch heißt das, daß bei der Berechnung des Einflusses des Druckgradienten die laminare Reibung außer Acht bleibt. Das ist also weniger als die in (5) vollzogene Vernachlässigung der laminaren Reibung überhaupt. Das Integral $\int_0^x \frac{\sqrt{1 + F x} - 1}{x}\, dx$ weist nunmehr im Gegensatz zu (5) keine Singularität bei $\eta - \eta_0 = 0$ bzw. $x = 0$ auf. Die Integration ergibt

$$y_2 = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1 + Fx} - 1\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{4}{F}\frac{1}{x}\frac{\sqrt{1 + Fx} - 1}{\sqrt{1 + Fx} + 1}. \tag{11}$$

Insgesamt erhalten wir also nach (9) und (11) die approximative Lösung

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\frac{1 - \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}}{x} + \frac{1}{\varkappa}\ln\left(2\varkappa x + \sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}\right) \\ & + \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1 + Fx} - 1\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{4}{F}\frac{1}{x}\frac{\sqrt{1 + Fx} - 1}{\sqrt{1 + Fx} + 1} + \frac{V_* \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

b) Wir führen nunmehr eine Fehlerabschätzung durch. Die Fehlerfunktion lautet nach (10)

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\left|\int_0^x \frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2 (1 + F x)}}{x^2}\, dx - 2\varkappa\int_0^x \frac{\sqrt{1 + F x}}{x}\, dx - \left(\int_0^x \frac{\sqrt{1 + 4\varkappa^2 x^2}}{x^2}\, dx - 2\varkappa\int_0^x \frac{dx}{x}\right)\right|. \tag{13}$$

[1] Eine Verwechslung mit den eingangs eingeführten Bezeichnungen x Bogenlänge, y Wandabstand dürfte wohl ausgeschlossen sein.

[2] Vgl. *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. **31** (1951), S. 309.

Wir stellen fest:

1. Die Fehlerfunktion (13) ist eine negative, monoton fallende Funktion. Das folgt aus der Bemerkung, daß

$$\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{1+b}-\sqrt{b}\right)<0 \quad \text{für} \quad a>b>0$$

ist. Der negative Maximalfehler wird demnach für $x\to\infty$ erreicht. Wir beschränken uns im folgenden auf die Ermittlung einer Schranke für den asymptotischen Fehler.

2. Die drei letzten Integrale der Fehlerfunktion (13) sind exakt auswertbar und ergeben einen negativen Beitrag. Das erste (elliptische) Integral

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+4\varkappa^2 x^2(1+Fx)}}{x^2}\,dx\,,$$

das einen positiven Beitrag liefert, wird numerisch abgeschätzt. Dabei machen wir Gebrauch davon, daß $\sqrt{1+\xi}$ für $0\leq\xi\leq 1$ in eine gleichmäßig konvergente alternierende Reihe entwickelbar ist. Infolge des alternierenden Charakters liefert das jeweilig letzte Glied der Reihe eine Fehlerschranke.

Unter Festlegung von x_* durch

$$4\varkappa^2 x_*^2(1+Fx_*)=1 \tag{14}$$

läßt sich die Wurzel $\sqrt{1+4\varkappa^2 x^2(1+Fx)}$ für die Intervalle $0\leq x\leq x_*$ und $x\geq x_*$ in folgender Weise durch eine Reihe darstellen:

1) Für $x\leq x_*$ kommt

$$\sqrt{1+4\varkappa^2 x^2(1+Fx)}=\sqrt{1+4\varkappa^2 x^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{4\varkappa^2 F x^3}{1+4\varkappa^2 x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{4\varkappa^2 F x^3}{1+4\varkappa^2 x^2}\right)^2+\cdots\right].$$

Nach (14) ist

$$\frac{4\varkappa^2 F x^3}{1+4\varkappa^2 x^2}<1\,.$$

Wir berücksichtigen nur das erste Glied der Reihe. Infolge des alternierenden Charakters der Reihe bleiben wir damit auf der sicheren Seite der Abschätzung; denn wir nehmen damit einen zu kleinen positiven Beitrag zur Berechnung des negativen Fehlers. Wir erhalten dann insgesamt für $x\leq x_*$ folgende Schranke der Fehlerfunktion

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\left\{-4\varkappa\left(\sqrt{1+Fx_*}-1\right)-2\varkappa\ln\frac{4}{F}\frac{1}{x_*}\frac{\sqrt{1+Fx_*}-1}{\sqrt{1+Fx_*}+1}\right\}. \tag{15}$$

2) Für $x\geq x_*$ lautet die Reihenentwicklung

$$2\varkappa x\sqrt{1+Fx}\left[1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\varkappa^2 x^2(1+Fx)}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4\varkappa^2 x^2(1+Fx)}\right]^2+\cdots\right].$$

Wir berücksichtigen wieder nur das erste Glied und erhalten unter Berücksichtigung von

$$4\varkappa^2 x_*^2=\frac{1}{1+Fx_*}$$

nach (14) für $x\geq x_*$ die Fehlerschranke

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\left[2\varkappa\left(1-\sqrt{2+Fx_*}\right)-2\varkappa\ln 2+2\varkappa\ln\left(1+\sqrt{2+Fx_*}\right)\right]. \tag{16}$$

3. Insgesamt haben wir so für den (maximalen) asymptotischen Fehler nach (15) und (16) die Schranke

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\Bigg[&-4\varkappa\left(\sqrt{1+Fx_*}-1\right)-2\varkappa\ln\frac{4}{F}\frac{1}{x_*}\frac{\sqrt{1+Fx_*}-1}{\sqrt{1+Fx_*}+1}\\&+2\varkappa\left(1-\sqrt{2+Fx_*}\right)-2\varkappa\ln 2+2\varkappa\ln\left(1+\sqrt{2+Fx_*}\right)\Bigg]\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

gefunden.

Diesen Ausdruck schätzen wir weiter mittels Entwicklung in alternierende Reihen ab, die wir jeweils im Sinne der Gewinnung einer Schranke abbrechen.

Mit [1] $-\sqrt{1+Fx_*} = -\left(1+\frac{1}{2}Fx_*\right)$, $-\sqrt{2+Fx_*} = -\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}Fx_*\right)$

(zu große Werte der negativen Beiträge) und

$$\ln\left(1+\sqrt{2+Fx_*}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}Fx_* - \frac{1}{16}\frac{1}{(1+\sqrt{2})}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)(Fx_*)^2,$$

$$-\ln\frac{4}{F}\frac{1}{x_*}\frac{\sqrt{1+Fx_*}-1}{\sqrt{1+Fx_*}+1} = \frac{1}{2}Fx_* - \frac{7}{32}(Fx_*)^2$$

(zu kleine Werte der positiven Beiträge) erhalten wir die Schranke

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}\left[2\left(1-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}Fx_*-\frac{1}{16}\left(\frac{4+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}+7\right)(Fx_*)^2\right]. \tag{18}$$

Setzen wir hier nach (14) $x_* = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}$

(zu großer Wert), so folgt schließlich mit $\frac{4+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} < 1$

für den negativen Maximalfehler die Schranke

$$-\frac{1}{\varkappa}\left[0{,}225+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{F}{\varkappa}+\frac{1}{16}\left(\frac{F}{\varkappa}\right)^2\right]. \tag{19}$$

Diese Schranke ist natürlich verbesserungsfähig. Berücksichtigt man in 1) und 2) je **drei Glieder** der Reihenentwicklung, was einen beträchtlich größeren Rechenaufwand erfordert, so erhält man in analoger Weise (wir geben nur das Resultat an) die wesentlich schärfere Schranke

$$-\frac{1}{\varkappa}\left[0{,}006+\frac{2\sqrt{2}-1}{8}\frac{F}{\varkappa}+0\left(\left(\frac{F}{\varkappa}\right)^2\right)\right]. \tag{20}$$

Der Betrag der von F freien Konstante ist nunmehr stark herabgedrückt worden; exakt muß er gleich Null sein, wie aus der Integraldarstellung (13) der Fehlerfunktion folgt. Der sich nach (20) ergebende Fehler ist für technische Strömungen sehr klein (vgl. Abschn. **4**, c).

3. Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichten mit Druckanstieg. a) Benutzen wir wieder unsere Ausgangskoordinaten, so haben wir nach (12) folgendes Ergebnis erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = {}& \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\frac{1}{Re_\delta}\frac{1}{\eta-\eta_0}\left[1-\sqrt{1+4\varkappa^2 Re_\delta^2\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)(\eta-\eta_0)^2}\right] \\
&+\frac{\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\varkappa}\ln\left[2\varkappa Re_\delta\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}(\eta-\eta_0)+\sqrt{1+4\varkappa^2 Re_\delta^2\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)(\eta-\eta_0)^2}\right] \\
&+\frac{2}{\varkappa}\left[\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}(\eta-\eta_0)}-\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}\right] \\
&+\frac{\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\varkappa}\ln\left[4\frac{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{1}{(\eta-\eta_0)}\frac{\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}(\eta-\eta_0)}-\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}(\eta-\eta_0)}+\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}\right] \\
&+Re_\delta\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\frac{\eta_0}{2}\right)\eta_0
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

für $\eta-\eta_0 \ll 1$, d. h. Trägheitsglieder vernachlässigbar und $l \approx \varkappa(y-\delta_0)$.

Das ist die Geschwindigkeitsverteilung, die an die laminare Unterschicht anschließt. Sie erfaßt insbesondere die Übergangsschicht von gleicher Größenordnung der laminaren und turbulenten Reibung.

In der vollturbulenten Schicht nimmt die Verteilung (21) für nicht zu kleine Wandabstände die einfachere Gestalt an

[1] Den Abschätzungen wird $Fx_* < 1$ bzw. nach (14) $F < 2\varkappa$ vorausgesetzt.

$$\left.\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}\eta}-\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}\right)\\ & +\frac{\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\varkappa}\ln\left[4\,\frac{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\,\frac{\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}\eta}-\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\sqrt{\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0\right)-\frac{\lambda}{2}\eta}+\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}\right]\\ & +\frac{\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}{\varkappa}\left[-1+\ln\left(4\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}\right)\right]+Re_\delta\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\frac{\eta_0}{2}\right)\eta_0\\ \text{für}\quad & \frac{1}{2\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}\ll\eta\ll 1\,.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Das ist dieselbe funktionale Form, die wir bereits kürzlich unter einer gewissen Einschränkung (siehe Ziff. 1) abgeleitet hatten [1]. Es tritt nur an die Stelle des Parameters c_1 bemerkenswerterweise der Parameter $c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0$. Verteilung (22) stellt die Verallgemeinerung des logarithmischen Gesetzes auf Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg dar: für schwachen Druckanstieg $\lambda/2\approx 0$ erhält man wieder das logarithmische Gesetz. Wir wollen die durch (22) beschriebene Gesetzmäßigkeit im folgenden kurz als „Wandgesetz" bezeichnen.

Wir geben noch die Verteilung in der laminaren Unterschicht an:

$$\varphi = Re_\delta\left(c_1-\frac{\lambda}{2}\frac{\eta}{2}\right)\eta\qquad\text{für}\qquad 0\leq\eta\leq\eta_0\,.\qquad(23)$$

b) Bekanntlich hat *Prandtl* dem logarithmischen Gesetz mittels der sog. Schubspannungsgeschwindigkeit $v_*=\sqrt{\tau_0/\varrho}$ die universelle Gestalt

$$\frac{u}{v_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_*\,y}{\nu}+\frac{1}{\varkappa}\left(-1+\ln 4\,\varkappa+\varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right)$$

geben können. Für die Ablösungsstelle $v_*=0$ versagt diese Formulierung offensichtlich.

Es ist nun bemerkenswert, daß den oben von uns abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten eine entsprechende Formulierung gegeben werden kann, die nunmehr auch an der Ablösungsstelle gilt und die universelle Gestalt des logarithmischen Gesetzes miteinschließt! Dies wird durch Einführung der verallgemeinerten „Schubspannungsgeschwindigkeit"

$$V_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\delta_0}\qquad(24)$$

mittels der Transformation $\dfrac{u}{V_*}=\dfrac{\varphi}{\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}}$, $\dfrac{V_*\,y}{\nu}=Re_\delta\sqrt{c_1-\frac{\lambda}{2}\eta_0}\,\eta\qquad(25)$

erreicht. Man erhält dann für den Übergang nach (21)

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{V_*} = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}\,\frac{1-\sqrt{1+4\,\varkappa^2\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu^2}\right)^2}}{\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}}\\ & +\frac{1}{\varkappa}\ln\left[2\,\varkappa\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)+\sqrt{1+4\,\varkappa^2\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)^2}\right]+\frac{2}{\varkappa}\left[\sqrt{1+F\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)}-1\right]\\ & +\frac{1}{\varkappa}\ln\left[\frac{4}{F}\,\frac{1}{\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)}\,\frac{\sqrt{1+F\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)}-1}{\sqrt{1+F\left(\frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)}+1}\right]+\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\left(1-\frac{F}{2}\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\right)\\ \text{für}\quad & \frac{V_*\,y}{\nu}-\frac{V_*\,\delta_0}{\nu}\ll\frac{V_*\,\delta}{\nu}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von Seite 295.

Dabei ist $F = \frac{\nu}{V_*}\frac{dp/dx}{\varrho V_*^2}\left(= \frac{-\lambda/2}{Re_\delta\left(c_1 - \frac{\lambda}{2}\eta_0\right)^{3/2}}\right)$ und hat die Bedeutung eines Formparameters.

Für die vollturbulente Schicht erhalten wir nach (22) die angekündigte Verallgemeinerung des logarithmischen Gesetzes in seiner universellen Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{V_*} &= \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1+F\frac{V_* y}{\nu}}-1\right)\\ &\quad+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{4}{F}\frac{\sqrt{1+F\frac{V_* y}{\nu}}-1}{\sqrt{1+F\frac{V_* y}{\nu}}+1}+\frac{1}{\varkappa}\left[-1+\ln 4\varkappa+\varkappa\frac{V_*\delta_0}{\nu}\left(1-\frac{F}{2}\frac{V_*\delta_0}{\nu}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

für $\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}\\ \frac{V_*\delta_0}{\nu}\end{matrix}\right\} \ll \frac{V_* y}{\nu} \ll \frac{V_*\delta}{\nu}.$

Bei schwachem Druckanstieg ergibt (27) mit $V_* \approx v_*$ und $F \approx 0$ die universelle Gestalt des logarithmischen Gesetzes.

Man kann auch dem Wandgesetz (27), das den Formparameter F enthält, durch Einführung der Variablen

$$\xi = F\frac{V_* y}{\nu} = \frac{(dp/dx)\,y}{\varrho V_*^2} \tag{28}$$

eine universelle Formulierung geben:

$$\frac{u}{V_*} - C_* = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1+\xi}-1\right)+\frac{1}{\varkappa}\ln 4\frac{\sqrt{1+\xi}-1}{\sqrt{1+\xi}+1}+\frac{1}{\varkappa}(-1+\ln 4\varkappa)\,; \tag{29}$$

hierbei ist die Konstante

$$C_* = \left(\frac{u}{V_*}\right)_0 + \frac{1}{\varkappa}\ln F\,,$$

wobei $(u/V_*)_0$ die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht bedeutet.

Für die laminare Unterschicht lautet die Darstellung in den Koordinaten (25)

$$\frac{u}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu}\left[1 - F\left(\frac{V_*\delta_0}{\nu} - \frac{1}{2}\frac{V_* y}{\nu}\right)\right], \tag{30}$$

die für $F \approx 0$ in die bekannte Relation

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu}$$

übergeht.

c) Als derzeit empirische Größen treten im Formelapparat die Koeffizienten $\varkappa$ und $V_*\delta_0/\nu$ auf. Der Koeffizient $\varkappa$ erscheint bereits im logarithmischen Gesetz. Experimentelle Analyse ergab seine Unabhängigkeit vom Druckgradienten [1]; dagegen ist $\varkappa$ als von der *Reynolds*schen Modellzahl abhängig anzusehen, nimmt jedoch für sehr große Werte derselben den Charakter einer universellen Konstante an. Auch die von mir [2] angegebene Erweiterung des logarithmischen Gesetzes um den Einfluß des Druckgradienten ergab mit den obigen Eigenschaften des Koeffizienten $\varkappa$ gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die genannten Eigenschaften des Koeffizienten $\varkappa$ weist auch der Koeffizient $v_*\delta_0/\nu$ des logarithmischen Gesetzes auf. Wenn man bedenkt, daß für schwächeren Druckanstieg $V_*\delta_0/\nu \approx v_*\delta_0/\nu$, so ist es naheliegend anzunehmen, daß auch $V_*\delta_0/\nu$ dieselben charakteristischen Eigenschaften besitzen wird und also für ein vorliegendes Strömungsmodell eine Konstante vom Betrage der Konstanten $v_*\delta_0/\nu$ sein wird. Physikalisch läßt sich diese Hypothese so deuten: Die Variable $v_* y/\nu$ kann aufgefaßt werden als eine mit der Schubspannungsgeschwindigkeit gebildete lokale *Reynolds*sche

[1] Vgl. hierzu die Messungen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. **17** (1949), S. 244.
[2] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. **22** (1954), S. 268.

Zahl in der laminaren Unterschicht, deren kritischer Wert an der Turbulenzgrenze mit der Dicke δ_0 der laminaren Unterschicht $v_* \delta_0/\nu$ beträgt. Dabei ist gemäß der Annahme $\tau \approx \tau_0$ in der wandnahen Zone die Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* \approx \sqrt{\tau_0/\varrho}$. Im Bereich mittleren oder starken Druckanstiegs, den wir hier betrachten, ist die Annahme konstanter Schubspannung nicht mehr haltbar: der Schubspannungsverlauf in Wandnähe wird durch die vollständigere Gleichung

$$\tau \approx \tau_0 + \frac{dp}{dx} y$$

beschrieben. Damit tritt nunmehr anstelle von $v_* \delta_0/\nu$ die mit

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\delta_0}$$

gebildete kritische *Reynolds*sche Zahl $V_* \delta_0/\nu$.

Die Hypothese $V_* \delta_0/\nu =$ konst. für ein vorliegendes Strömungsmodell hat eine wichtige Konsequenz. Der Formparameter F nimmt an der Stelle der Ablösung, wenn man die sich hier aus (24) ergebende Identität

$$\frac{dp/dx}{\varrho V_*^2} = \frac{1}{\delta_0}$$

beachtet, nach der in (26) gegebenen Definition den Wert

$$F_{Abl.} = \frac{1}{V_* \delta_0/\nu} \tag{31}$$

an und ist durch die Modellkonstante $V_* \delta_0/\nu$ festgelegt. Dieses Ergebnis findet in Abschnitt 4 eine gewisse experimentelle Bestätigung.

Wir merken weiter an, daß nach der Hypothese $V_* \delta_0/\nu =$ konst. sich die Dicke δ_0 der laminaren Unterschicht aus der Gleichung

$$\delta_0^3 \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \delta_0^2 \frac{\tau_0}{\varrho} = \nu^2 \left(\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right)^2 \quad \text{bestimmt.}$$

4. Vergleich mit dem Experiment.* Zum Vergleich ziehen wir die von *Nikuradse* [1] in divergenten Kanälen durchgeführten Messungen heran. Es bedeuten im folgenden: b die Kanalbreite, α den halben Öffnungswinkel des ebenen Diffusors, u_1 die Geschwindigkeit in Kanalachse.

a) Ermittlung der Wandschubspannung. Wie wir schon kürzlich [2] darlegten, können die theoretischen Gesetzmäßigkeiten der Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe dazu dienen, die schwer zu messenden sehr kleinen Wandschubspannungen τ_0 im Druckanstiegbereich zu ermitteln. In der zitierten Arbeit hatten wir diese Ermittlung durchgeführt, indem wir die Kurve des „eingeschränkten" Wandgesetzes [3] jeweils passend durch die wandnahen Meßpunkte der Geschwindigkeit legten. Wir führen diese Prozedur nochmals mittels des Wandgesetzes (22) durch und werden gegenüber den damals ermittelten Werten τ_0 kleine, mit dem Druckanstieg wachsende, Korrekturen erhalten.

Das Wandgesetz (22) lautet hier mit

$$\eta = \frac{y}{b/2}, \qquad \lambda = \frac{-(dp/dx)\, b}{(\varrho/2)\, u_1^2} \qquad \text{und} \qquad Re = \frac{u_1 b}{\nu}$$

folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{2}{\varkappa}\left[\sqrt{\left(c - \frac{\lambda}{4}\eta_0\right) - \frac{\lambda}{4}\eta} - \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}\right] \\ & + \frac{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}}{\varkappa} \ln\left[4\,\frac{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}{(-\lambda/4)}\,\frac{\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0\right) - \frac{\lambda}{4}\eta} - \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}}{\sqrt{\left(c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0\right) - \frac{\lambda}{4}\eta} + \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}}\right] \\ & + \frac{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\varkappa Re \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}\right) + \varkappa \frac{V_* \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\frac{V_* \delta_0}{\nu}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

* Die praktische Durchführung dieses Abschnitts lag in den Händen meines Mitarbeiters Herrn *H. Moch*.

[1] *J. Nikuradse*, Untersuchungen über die Strömung des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, VDI-Forschungsheft 289 (1929).

[2] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. **22** (1954), S. 268. [3] Vgl. Fußnote 1 von Seite 296.

wobei

$$F = \frac{-\frac{\lambda}{4}}{(Re/2)\left(c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0\right)^{3/2}}.$$

Die empirischen Koeffizienten $\varkappa$, $V_* \delta_0/\nu$ sind hier bei der mittleren *Reynolds*schen Zahl $Re \approx 81500$ den Messungen der konvergenten Kanalströmungen entnehmbar, die bei der nur wenig verschiedenen Zahl $Re \approx 67\,500$ durchgeführt wurden:

$$\varkappa = 0{,}6\,, \qquad \frac{v_* \delta_0}{\nu} = 9{,}5\,[1]\,.$$

Unter Zugrundelegung der von *Nikuradse* gemessenen Druckgradienten λ ermittelten wir zunächst durch Anpassen (Abb. 1) die Werte des Parameters

$$\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}\,.$$

Die dimensionslosen Wandschubspannungen c_1 konnten dann unter Benutzung der aus der Definitionsgleichung (25) für $V_* \delta_0/\nu$ fließenden Beziehung

$$\eta_0 = \frac{\frac{V_* \delta_0}{\nu}}{(Re/2)\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}} \qquad (33)$$

berechnet werden.

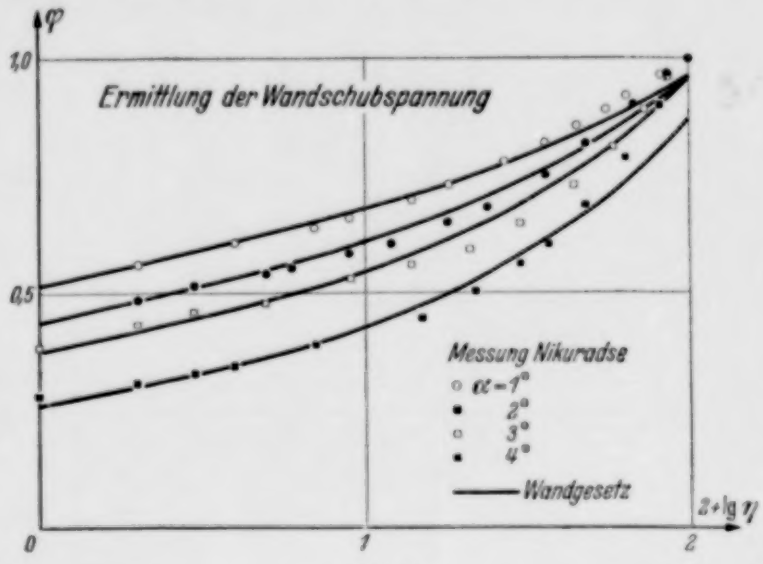


Abb. 1.

Es ergaben sich folgende Werte:

α	λ_{exp}	$\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}$	η_0	c_1
1°	—0,043	0,0375	0,0062	0,00134 (137)
2°	—0,085	0,0332	0,0070	0,00095 (102)
3°	—0,120	0,0298	0,0078	0,00065 (75)
4°	—0,140	0,0241	0,00967	0,00026 (42)

(Vgl. ferner Abb. 2 [2].)

In Klammern haben wir die erwähnten früheren Werte zum Vergleich eingetragen.

b) Dicke der laminaren Unterschicht. Nach (33) ergibt sich der in Abb. 3 [2] angegebene Verlauf der dimensionslosen Dicke $\eta_0 = \delta_0/(b/2)$ der laminaren Unterschicht über α, der das Anwachsen der laminaren Unterschicht mit größer werdendem Druckanstieg zeigt.

c) Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung. In Abb. 4 bis 7 sind die Übergangsverteilung (26) sowie das Wandgesetz (27) für folgende sich gemäß der Ermittlung in a) ergebenden Parameterwerte

α	1°	2°	3°	4°
F	0,0050	0,0142	0,0278	0,0615

dargestellt [Formel für F siehe (32)].

Die Meßpunkte wurden gemäß der Ermittlung in a) nach der (25) entsprechenden Formel

$$\frac{u}{V_*} = \frac{\varphi}{\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}}\,, \qquad \frac{V_* y}{\nu} = (Re/2)\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta_0}\,\eta$$

eingetragen.

---

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. **20** (1952), S. 37.

[2] In den Abb. 2 und 3 sind noch die Werte für $\alpha = 0°$ eingetragen: $c_1 = 0{,}0018$ (vgl. *W. Sz.*, Ing.-Arch. **20**) und $\eta_0 = 0{,}0055$ gemäß der Formel $\eta_0 = \frac{v_* \delta_0/\nu}{(Re/2)\sqrt{c_1}}$.

Es fällt auf, daß die wandnächsten Punkte schlecht zum Übergangsbogen liegen. Diese Diskrepanz dürfte nicht zu Lasten der Theorie gehen; man kann vermuten, daß mit den damals (1929) zur

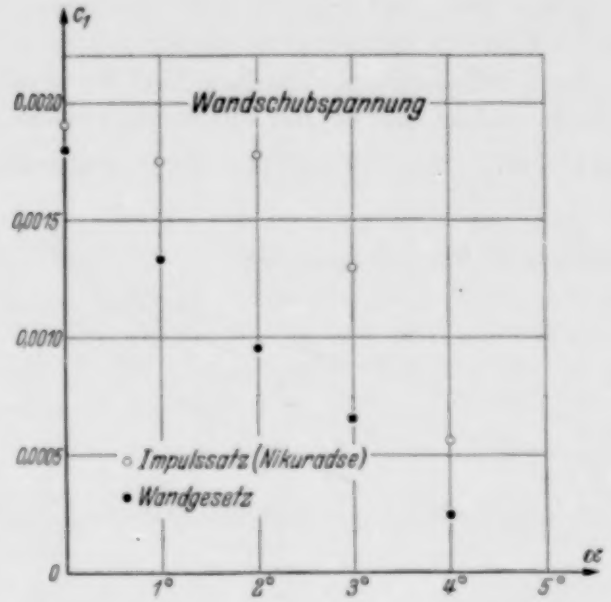


Abb. 2.

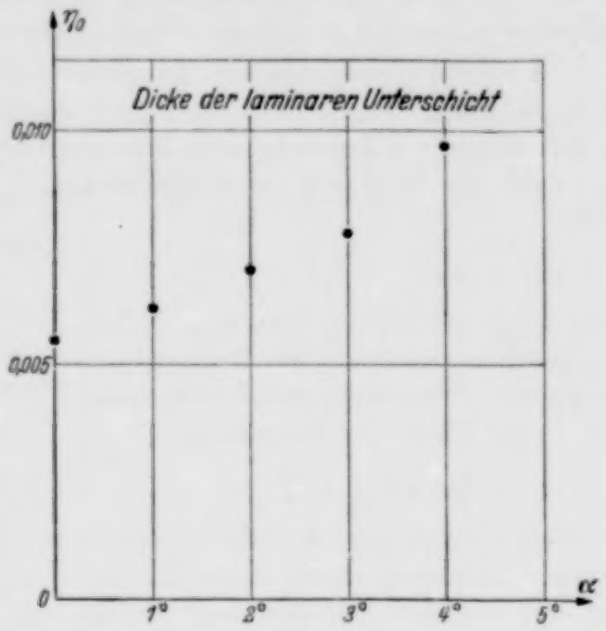


Abb. 3.

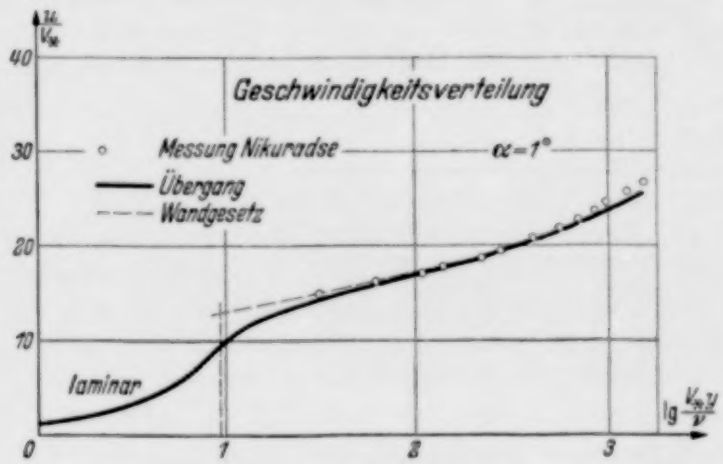


Abb. 4.

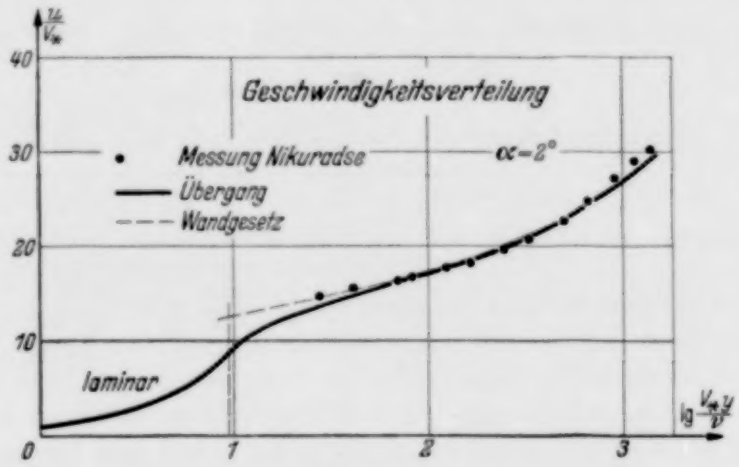


Abb. 5.

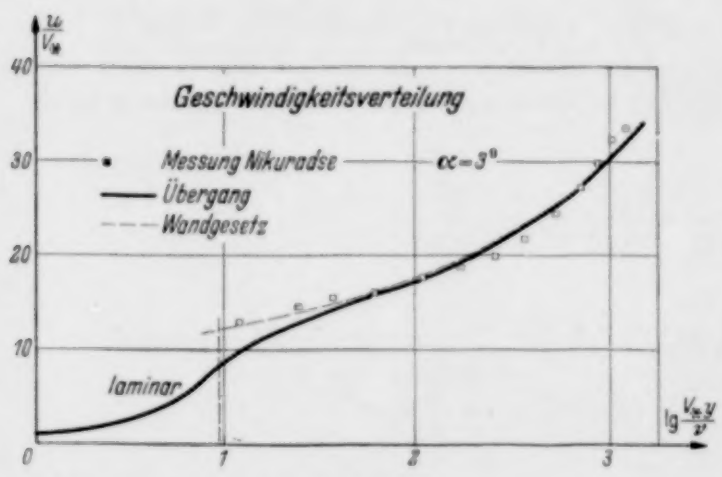


Abb. 6.

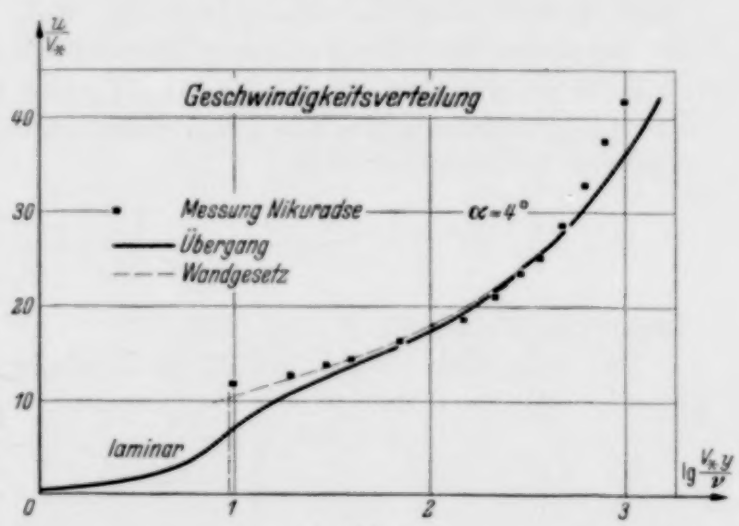


Abb. 7.

Verfügung stehenden Mitteln die Messung dieser wandnächsten Punkte, welche die Messung sehr geringer Druckdifferenzen erforderte, nur unvollkommen durchgeführt werden konnte [1].

[1] Vgl. hierzu *H. Reichardt*, Z. angew. Math. Mech. **20** (1940), S. 297.

Abb. 8 zeigt die Gesamtheit der Messung und der theoretischen Verteilung nach dem Wandgesetz (27). Dazu haben wir noch das logarithmische Gesetz und die sich gemäß (31) mit

$$F = \frac{1}{V_* \, \delta_0 / \nu} \qquad (= 0{,}1053)$$

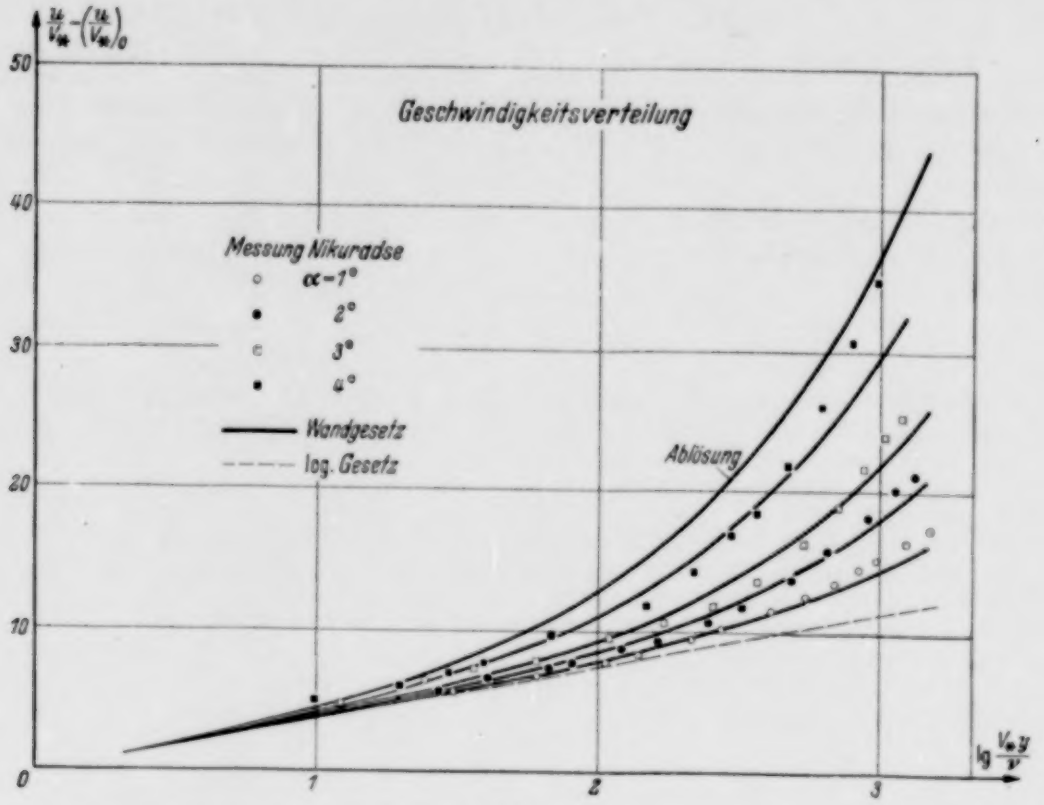


Abb. 8.

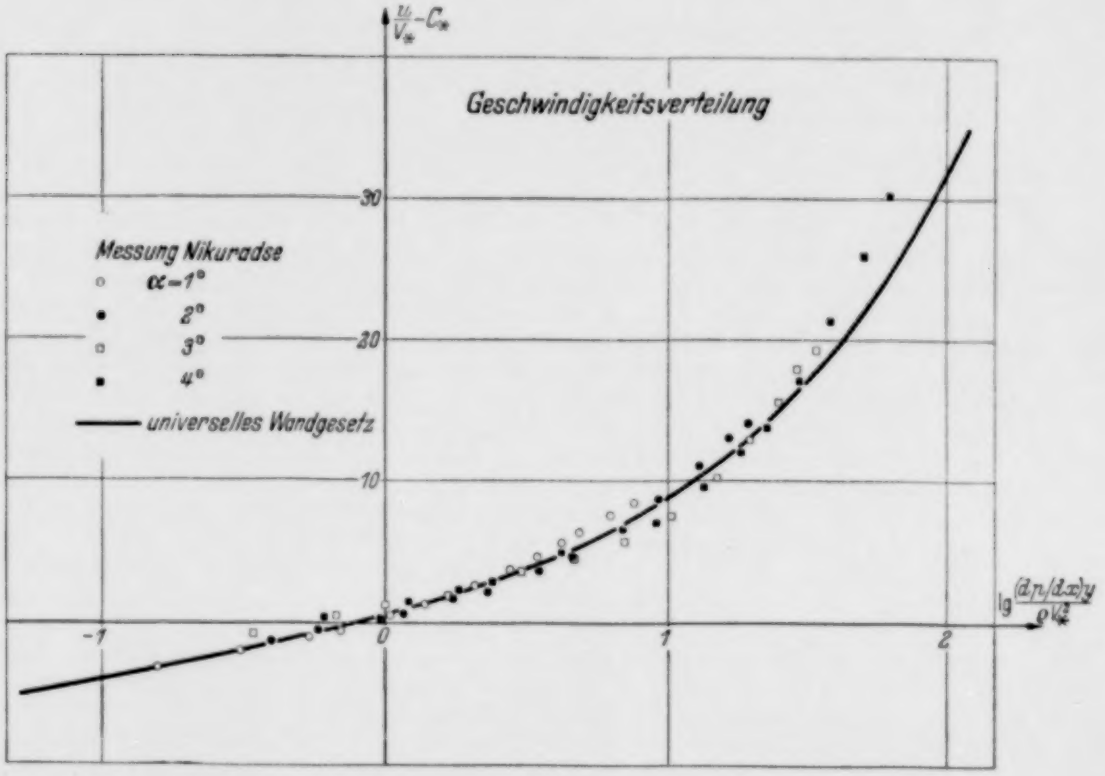


Abb. 9.

ergebende theoretische Verteilung für die Ablösung eingetragen. (Um den Einfluß des Druckgradienten deutlicher hervorzuheben, haben wir hier $(u/V_*) - (u/V_*)_0$ aufgetragen, wobei

$$\left(\frac{u}{V_*}\right)_0 = \frac{V_* \, \delta_0}{\nu}\left(1 - \frac{F}{2}\,\frac{V_* \, \delta_0}{\nu}\right)$$

nach (30) die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht angibt.) Der Abb. 8 kann man entnehmen, inwieweit dem Einfluß des Druckgradienten durch das Wandgesetz Rechnung getragen wird. Zur Verteilung für die Ablösung ist zu bemerken, daß ihre relative Lage gut zu der Angabe von *Nikuradse* paßt, daß die Ablösung bei $\alpha \approx 4{,}8°$ einsetzt.

Schließlich enthält Abb. 9 noch das Wandgesetz in seiner universellen Form (29). Auch hier zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

5. Zusammenfassung. Unter Vernachlässigung der Trägheitsglieder wird aus der Differentialgleichung turbulenter Grenzschichtströmungen bei Zugrundelegung des *Prandtl*schen Mischungswegansatzes, wobei der Mischungsweg dem Wandabstand proportional gesetzt wird, die wandnahe Geschwindigkeitsverteilung für Strömungen mit Druckanstieg bis einschließlich der Ablösung in geschlossener analytischer Form approximativ berechnet. Die Fehlerabschätzung, welche auf die Approximation eines elliptischen Integrals hinauskommt, ergibt einen für technische Strömungen vernachlässigbaren Fehler. Dem als Verallgemeinerung des logarithmischen Gesetzes erhaltenen Wandgesetz kann bei Einführung einer verallgemeinerten Schubspannungsgeschwindigkeit eine die universelle Form des logarithmischen Gesetzes enthaltende Formulierung gegeben werden. Die empirischen Koeffizienten des Wandgesetzes sind die des logarithmischen Gesetzes. Der Vergleich mit den *Nikuradse*schen Messungen divergenter Kanalströmungen ergibt befriedigende Übereinstimmung.

(Eingegangen am 8. Oktober 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Forschungsinstitut für Mathematik, Abt. Angewandte Mathematik, Berlin W 8, Jägerstr. 22—23.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Von Dr. **R. Courant**, Professor an der New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York.

Erster Band: **Funktionen einer Veränderlichen.** Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Textfiguren. XI, 450 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 33.—

Inhaltsverzeichnis: Vorbemerkungen. — **Vorbereitungen.** Zahlenkontinuum. Der Funktionsbegriff. Nähere Betrachtung der elementaren Funktionen. Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen — Zahlenfolgen — Vollständige Induktion. Der Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge. Beispiele. Genauere Erörterung des Grenzwertbegriffes. Der Begriff des Grenzwertes bei stetigen Veränderlichen. Der Begriff der Stetigkeit. — Anhang I. Vorbemerkungen. — Das Häufungsstellen-Prinzip und seine Anwendungen. Sätze über stetige Funktionen. Bemerkungen über die elementaren Funktionen. — Anhang II. Polarkoordinaten. Bemerkungen über komplexe Zahlen. — **Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung.** Das bestimmte Integral. Beispiele. Die Ableitung oder der Differentialquotient. Das unbestimmte Integral, die primitive Funktion und die Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung. Einfachste Methoden zur graphischen Integration. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Integral und dem Differentialquotienten. Integralabschätzungen und Mittelwertsatz der Integralrechnung. — Anhang. Die Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion. Zusammenhang des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. — **Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen.** Die einfachsten Differentiationsregeln und ihre Anwendungen. Die entsprechenden Integralformeln. Die Umkehrfunktion und ihr Differentialquotient. Die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen. Maxima und Minima. Logarithmus und Exponentialfunktion. Einige Anwendungen der Exponentialfunkion. Die Hyperbelfunktionen. Die Größenordnung von Funktionen. — Anhang. Betrachtung einiger spezieller Funktionen. Bemerkungen über die Differenzierbarkeit von Funktionen. Verschiedene Einzelheiten. — **Weiterer Ausbau der Integralrechnung.** Zusammenstellung der elementaren Integrale. Die Substitutionsregel. Weitere Beispiele zur Substitutionsmethode. Die Produktintegration. Integration der rationalen Funktionen. Integration einiger anderer Funktionsklassen. Bemerkungen über Funktionen, die sich nicht mittels der elementaren Funktionen integrieren lassen. Erweiterung des Integralbegriffes. Uneigentliche Integrale. — Anhang. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung. — **Anwendungen.** Darstellung von Kurven. Anwendung auf die Theorie der ebenen Kurven. Beispiele. Die einfachsten Probleme der Mechanik. Weitere Anwendungen: Fall eines Massenpunktes auf einer Kurve. Arbeit. — Anhang. Eigenschaftender Evolute. — **Die TAYLORsche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale.** Der Logarithmus und der Arcustangens. Die allgemeine TAYLORsche Formel. Anwendungen. Entwicklung der elementaren Funktionen. Geometrische Anwendungen. — Anhang. Beispiel einer Funktion, die sich nicht in eine TAYLORsche Reihe entwickeln läßt. Approximation beliebiger stetiger Funktionen durch Polynome und trigonometrische Summen. Nullstellen, Unendlichkeitsstellen von Funktionen und sog. unbestimmte Ausdrücke. Interpolation. — **Exkurs über numerische Methoden.** Vorbemerkungen. — Numerische Integration. Anwendungen des Mittelwertsatzes und des TAYLORschen Satzes. Numerische Auflösung von Gleichungen. — Anhang. Die STIRLINGsche Formel. — **Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse.** Vorbemerkungen. — Die Begriffe Konvergenz und Divergenz. Untersuchung der Konvergenz und Divergenz. Grenzübergänge und Reihen von Funktionen einer Veränderlichen. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz. Potenzreihen. Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen. Methode der unbestimmten Koeffizienten. Beispiele. Potenzreihen mit komplexen Gliedern. — Anhang. Multiplikation und Division von Reihen. Grenzübergänge, die mit der Exponentialfunktion zusammenhängen. Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale. Unendliche Produkte. Weitere Beispiele für unendliche Reihen. — **FOURIERsche Reihen.** Die periodischen Funktionen. Die Verwendung der komplexen Schreibweise. Beispiele für die FOURIERsche Reihe. Beweis der FOURIERschen Reihenentwicklung. Die mittlere Approximation durch trigonometrische Polynome. — Anhang. BERNOULLIsche Polynome und ihre Anwendungen. Integration von FOURIERschen Reihen. Trigonometrische Interpolation. — **Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge.** Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik. Lösung der homogenen Gleichung. Freie Bewegungen. Unhomogene Gleichung. Erzwungene Bewegungen. Schlußbemerkung. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXI. Band: **MATHIEUsche Funktionen und Sphäroid-Funktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme.** Von Dr. **Josef Meixner,** ord. Professor der Theoretischen Physik an der Technischen Hochschule in Aachen und Dr. **Friedrich Wilhelm Schäfke,** Dozent für Mathematik an der Universität Mainz. Mit 29 Abbildungen. XII, 414 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 49.—; Ganzleinen DM 52.60

Inhaltsübersicht: I. MATHIEUsche Funktionen. Historisches. II. Sphäroidfunktionen. Historisches. III. Anwendungen der MATHIEU- und Sphäroidfunktionen. IV. Zur Darstellung. V. Beschränkungen. VI. Zur Bezeichnung. — **1. Grundlagen:** Die Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten und ihren Grenzfällen. Aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Über Parameterabhängigkeit bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Über Eigenwertprobleme mit einem Parameter. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern I, II, III. Über dreigliedrige lineare Rekursionen. Eine Verallgemeinerung der HANKELschen asymptotischen Reihen. — **2. MATHIEUsche Funktionen.** Die MATHIEUsche Differentialgleichung. Allgemeines. Die Funktionen $\lambda_\nu(h^2)$ und $me_\nu(z;h^2)$. Die Stabilitätskarte. Charakteristische Kurven. Die Funktionen $M_\nu^{(j)}(z;h)$. Das Additionstheorem. Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen. Die Funktionen ganzer Ordnung. Ergänzungen. — **3. Sphäroidfunktionen.** Die Sphäroiddifferentialgleichung. Allgemeines. Die Sphäroidfunktionen $ps_n^m(z;\gamma^2)$. Über Zylinder- und Kugelfunktionen. Der charakteristische Exponent ν. Die Funktionen $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ und $\tilde{Q}s_\nu^\mu(z;\gamma^2)(\nu \neq 1/2 (\mathrm{mod}\ 1))$. Die Funktionen Ps_ν^μ, Qs_ν^μ, ps_ν^μ, qs_ν^μ und $S_\nu^{\mu(j)}$ $[\nu \neq 1/2 (\mathrm{mod}\ 1)]$. Ein Additionstheorem. Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen. — Ergänzungen. — **4. Anwendungen der MATHIEUschen Funktionen und der Sphäroidfunktionen.** Mechanische und elektrische Schwingungen mit periodisch veränderlichen Parametern. Systeme mit räumlich periodischer Struktur. Mechanische und akustische Eigenschwingungen. Elektromagnetische Eigenschwingungen. Abstrahlungsprobleme. Beugungsprobleme. Wellenmechanische Probleme. — Literaturverzeichnis. Verzeichnis der wichtigsten Funktionssymbole. Namen- und Sachverzeichnis.

LX. Band: **Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.** Von Dr. **Lothar Collatz,** o. Professor an der Universität in Hamburg. Zweite neubearbeitete Auflage. Mit 118 Abbildungen und einem Porträt. XV, 526 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 56.—; Ganzleinen DM 59.60

Inhaltsübersicht: **I. Hilfsmittel. Einige allgemeine Prinzipien:** Einteilung der Aufgaben bei Differentialgleichungen. Differenzenrechnung und Interpolationsformeln. Weitere Hilfsmittel aus der Analysis. Fehlerabgleichprinzipien. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis. — **II. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen:** Einleitung. Das RUNGE-KUTTA-Verfahren für Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Differenzenschemaverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung. Theorie der Differenzenschemaverfahren. Differenzenschemaverfahren für Differentialgleichungen höherer Ordnung. — **III. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen:** Das gewöhnliche Differenzenverfahren. Verbesserungen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens. Zur Theorie der Differenzenverfahren. Einige allgemeine Verfahren. Das RITZsche Verfahren bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Das RITZsche Verfahren bei Randwertaufgaben höherer Ordnung. Reihenansätze. Einige spezielle Verfahren für Eigenwertaufgaben. — **IV. Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen.** Notwendigkeit theoretischen Überblicks: Das gewöhnliche Differenzenverfahren. Verbesserungen des Differenzenverfahrens. Zur Theorie der Differenzenverfahren. Partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Charakteristikenverfahren bei Systemen von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Ergänzungen. — **V. Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen:** Das gewöhnliche Differenzenverfahren. Verbesserungen des Differenzenverfahrens. Der Randmaximumumsatz und Schranken für Lösungsfunktionen. Einige allgemeine Methoden. Das RITZsche Verfahren. Das TREFFTZsche Verfahren. — **VI. Integral- und Funktionalgleichungen:** Allgemeine Methoden bei Integralgleichungen. Einige spezielle Verfahren bei linearen Integralgleichungen. Singuläre Integralgleichungen. VOLTERRAsche Integralgleichungen. Funktionalgleichungen. — Anhang: Tafeln I bis X. I. Näherungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x, y)$. — II. Näherungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$. — III. Ausdrücke des Differenzenverfahrens bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. — IV. EULERsche Ausdrücke bei Funktionen von $y(x)$. — V. EULERsche Ausdrücke bei Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher. — VI. Sterne für die Operatroren Δu und $\Delta\Delta u$. — VII. Verzeichnis der behandelten Beispiele. — VIII. Allgemeine TAYLOR-Entwicklung für die Operatoren Δ und $\Delta\Delta$ im quadratischen Netz. — IX. Allgemeine TAYLOR-Entwicklung für die Operatoren Δ und $\Delta\Delta$ im Dreiecksnetz. — X. Allgemeine TAYLOR-Entwicklung für die Operatoren Δ und $\Delta\Delta$ im Würfelnetz. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Mit 2 Prospekten Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg und einem Prospekt Springer-Verlag, Wien.

Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.